KK 1824

# Anfangsgründe
der
# Mechanik
zum
Gebrauche der k. k. Ingenieursschule
auf
hohen Befehl aufgesetzt
von
Friedrich Wilhelm Gerlach,
Lehrer allda.

## Zweyter Theil.

WIEN,
gedruckt bey Joh. Thomas Edlen v. Trattnern
k. k. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.
1786.

Kern-Kernried'sche
Stiftungsbibliothek
Augsburg

# Zweyter Theil
der
# Mechanik

## Von den flieſsigen Körpern, von ihrem Gleichgewichte, und von Eintauchung der festen Körper.

591.

Wir haben bisher von dem Gleichgewichte der festen Körper, von ihrer Bewegung, von ihren Kräften gehandelt. Solche Abhandlungen bekommen von verschiedenen Autorn, verschiedene Namen: die vom Gleichgewichte, wie schon gesagt, wird **Statik**; und zwar **Geostatik**, wenn es feste Körper betrifft; und **Hydrostatik**, wenn es flieſsige betrifft, genennet: die von

der Bewegung der festen Körper heißet eigentlich **Mechanik**; und der flieſsigen, **Hydraulik**: und die von den Kräften überhaupt, **Dynamik**, und bey den flieſsigen, **Hydrodynamik**: und die von der Luft insonderheit, **Aerometrie**. Allein, wir begreifen alle diese Wissenschaften unter dem allgemeinen Namen **Mechanik**; und machen nur zwey Abtheilungen, wie wir gleich anfangs angezeiget: davon die erste von den festen, und die andere von den flieſsigen Körpern handelt.

592. Ob wir schon nicht wissen, wie weit der Grad der Feinheit der Theile vom Flieſsigen gehe: so können wir doch nicht zweifeln, daß diese Theile materialisch seyn; und daß aus diesem Grunde das allgemeine Gesetz des Gleichgewichtes; und das von der Bewegung, welches wir oben gegeben haben, ihnen, wie den festen Körpern zukommen. Aber da dieses Gesetz des Gleichgewichts, nicht das einzige nothwendige ist: so müssen wir untersuchen, ob kein anderes allgemeines Gesetz ist, wovon dieses Gleichgewicht abhangen könne.

593. Da das Gleichgewicht in der Aufhebung aller Kräfte besteht; und wir die Weise nicht wissen, wie die Theile der Flieſsigen ihre Kräfte, einer zum andern fortsetzen: so müssen wir zu der Erfahrung unsere Zuflucht nehmen, um die ersten Gründe fest zu setzen. Wir wollen also den Anfang mit Vortragung desjenigen machen, was man in dieser Materie durch die Erfahrung am zuverläßigsten weis. Aber zuvor wollen wir beobachten, daß man zweyerley Flieſsige unterscheiden muß. Einige, deren Theile vollkommen hart sind; oder als solche angesehen werden können; die in einer Masse zusammen genommen, nicht zusammen gedrücket werden können; das ist, die nicht dahin gebracht werden können, daß sie einen kleinern Raum einnehmen, als den sie in ihrem natürlichen Zustande einnehmen: so ist das Wasser und das meiste Flieſsige beschaffen. Die andern sind aus zusammen-

mendrücklichen und elastischen Theilen zusammengesetzt, nämlich fähig einen kleinern Raum einzunehmen, wann man sie zusammendrücket; und wieder ihren ersten Zustand anzunehmen, wann die Ursache, die sie in einen engern Raum brachte, zu wirken aufhöret: so ist die Luft beschaffen. Wir werden zuerst von den unzusammendrücklichen Fließigen reden.

594. Sehen wir nun, was die Erfahrung von dem Gleichgewichte der Fließigen lehret.

Es sey ABCD (Fig. 223. u. 224) eine Röhre, die aus drey Theilen AB, BC, CD von gleichem Durchmesser zusammengesetzet ist. Stellet man sich vor, daß in eine jede von diesen zwey Röhren durch den Theil AB Wasser geschüttet werde; so wird es von diesem in die andern Theile der Röhre BC und CD übergehen: und hört man auf zu gießen; so befindet sich das Wasser in den beiden Theilen AB, CD gleich hoch, das ist, seine Oberfläche in derselben Horizontalline AD oder EF, wie immer die Neigung des dritten Theiles BC ist. Dieß ist eine sehr bekannte Erfahrung, die wir zum Grundsatze annehmen. Hier sind die Folgen, die diese Erfahrung darbietet.

595. Wird der Canal ABCD bis AD angefüllet; und man bildet sich ein, durch was immer für einen Punkt E gehe eine Horizontalline EF; so ist augenscheinlich, daß die Schwere des in EBCF enthaltenen Wassers nichts beytrage die Säulen AE und DF zu erhalten: weil die Erfahrung lehret, daß, wenn das Wasser in dem Arme AB nur den Punkt E erreichet, es in dem Arme DC auch nur den Punkt F erreichen wird; und daß folglich der Canal EBCF für sich selbst im Gleichgewichte steht. Folglich fände das Gleichgewicht in der ganzen Röhre noch statt; wenn das in EBCF enthaltene Fließige auch seine Schwere auf einmal

verlöre. Man muß also dieſes Flieſsige nur als ein Mittel die zwey Säulen AE und DF mit einander zu verbinden ansehen; so daß es den ganzen Druck, welchen die Säule AE gegen selbes ausübet, in die Säule DF übersetzet; und so umgekehrt.

Es ist nicht weniger augenscheinlich, daß dieselbe Sache statt fände; wenn man statt der zwey Säulen AE und DF zwey Drücke von demselben Werthe setzete. Daraus kann man also überhaupt schlieſsen, daß, **wenn ein Flieſsiges ohne Schwere in was immer für einem Gefäße eingeschlossen ist, und man in diesem Gefäße eine Oeffnung macht, und bey dieser was immer für einen Druck anbringet, dieser Druck sich gleich nach allen Gegenden ausbreiten werde.** Denn die Neigung des Armes BC (Fig. 224) verhindert nicht, daß die Sachen nicht eben so, wie nach der 223. Fig. geschehen.

596. Nun ist leicht einzusehen, daß der Druck nicht allein gleich nach allen Gegenden geschehe; sondern daß er auch senkrecht auf jeden Punkt der Oberfläche des Gefäßes, darin das Flieſsige eingeschlossen ist, geschehe. Denn, wenn der auf die Fläche wirkende Druck nicht senkrecht wirkete; so könnte er augenscheinlich von dem Widerstande dieser Fläche nicht ganz aufgehoben werden, die wir ohne das ohne Reibung setzen. Es entstünde also daraus eine Wirkung auf die Theile des Flieſsigen selbst: welche nothwendig nach allen Gegenden geschehen und eine Bewegung in dem Flieſsigen veranlassen müßte. Es wäre also niemals möglich, daß ein Flieſsiges in einem Gefäße im Gleichgewichte wäre: so wider die Erfahrung ist.

597. Schlieſsen wir also daraus, daß, wenn die Theile eines in was immer für einem gegen AD offenen

Gefäße ABCD (Fig. 225) enthaltenen Fließigen von was immer für Kräften gereizet werden, und doch im Gleichgewichte bleiben, diese Kräfte gegen die Oberfläche AD senkrecht seyn müssen. Denn, wenn das Gleichgewicht ist, so wird dieses Gleichgewicht nicht weniger bestehen, wenn man eine Decke von der nämlichen Figur, als die Oberfläche AD anbringet. Nun haben wir erst gesehen, daß in diesem Falle, die auf die Fläche AD wirkenden Kräfte, auf dieser Fläche senkrecht seyn müssen.

598. Setzen wir also, daß die auf des Fließigen Theile wirkenden Kräfte, die Schwere selbst seyn: als dann werden wir schließen, daß der Schwere Richtung auf der Oberfläche des stillstehenden Wassers nothwendig senkrecht sey; und daß folglich die Theile von demselben schweren Fließigen horizontal seyn müssen, um im Gleichgewichte zu seyn, die Figur des Gefäßes, das sie einschließt, mag sonst seyn, wie sie will.

599. Stellen wir uns nun vor, das Gefäß ABCD (Fig. 226) sey um und um geschlossen, und voll von einem Fließigen ohne Schwere; und man habe in E eine kleine Oeffnung gemacht; und bringe da was immer für einen Druck an: so ist es augenscheinlich, daß der Druck, der davon auf die ebene, durch BC vorgestellte Oberfläche entstehen wird, keinesweges von der Menge des in diesem Gefäße enthaltenen Fließigen, noch von des Gefäßes Figur, abhangen werde; sondern daß, da der in E angebrachte Druck gleich nach allen Gegenden geschieht, dieser von EC dem in E, so vielmal als Punkte in BC sind, wiederholt, gleich seyn werde.

600. Aus der nämlichen Ursache wird der in E angebrachte Druck dahin streben, um die obere Grundfläche AD los zu machen; und die Kraft, mit der er

wirken wird, wird für jeden Punkt, dem Drucke gleich seyn, den er in E ausübt, so vielmal wiederholt, als Punkte in AD sind.

601. Stellen wir uns nun vor, das Gefäß ABCDEF (Fig. 227), daran der Theil CD horizontal ist, sey mit einem schweren Flieſsigen angefüllt. Ich sage, der Druck, der davon auf dem Boden CD entsteht, hange keineswegs von der Menge des in dem Gefäße enthaltenen Flieſsigen; sondern allein von der Gröſse des Bodens CD, und der Höhe der Oberfläche des Wassers AF über der Grundfläche CD, ab.

Denken wir wirklich die Horizontale BE, und bilden wir uns ein, das in BCDE enthaltene Flieſsige werde auf einmal schwerlos: so ist es offenbar, nach dem, was (599) gesagt worden, daß was immer für ein vertikaler Faden IK des in ABEF enthaltenen schweren Flieſsigen, in dem Punkte K einen Druck ausübet, welcher sich in dem Flieſsigen BCDE ganz ausbreiten muß; und daß dieser Druck von unten hinauf gleiche Wirkung mache, um die Wirkung eines jeden andern Fadens, die auf die verschiedenen Punkte von BE senkrecht geschieht, zurück zu halten; so daß der Faden IK allein mit allen andern Fäden der Masse ABEF das Gleichgewicht halte. Da nun die Masse BCDE allezeit schwerlos gesetzet wird: so entsteht auf dem Boden CD kein anderer Druck, als der vom Faden IK; welcher sich auf alle Punkte von CD ausbreitet, und da einen Druck verursachet, welcher dem gleich ist, der in dem Punkte K geschieht, und so vielmal wiederholt wird, als Punkte in CD sind.

Bildet man sich also das in dem Gefäße ACDF (Fig. 228) enthaltene schwere Flieſsige in horizontale Blätchen getheilt ein: so theilet das obere Blätchen dem Boden CD keine andere Wirkung mit, als der Faden

ab von der Höhe dieses Blätchens mittheilen würde. Das nämliche findet bey jedem Blätchen statt. Der Boden wird also eben so gedrückt, als er es durch die Summe der Fäden ab, bc, cd, ꝛc. würde: und da dieser Druck sich über alle Punkte von CD gleich verbreitet; so ist er dem Produkte von CD in die Summe der Drücke gleich, welche die Fäden ab, bc, cd auf demselben Punkte auszuüben fähig sind.

Ist also 1) das Fließige gleichartig, das ist, aus Theilen von derselben Beschaffenheit, derselben Schwere, ꝛc. zusammengesetzet: so wird der Druck auf dem Boden durch CDxag vorgestellet; das ist, er wird durch das Gewicht eines Prisma oder Zylinders gemessen, das zur Grundfläche CD und zur Höhe ag hat.

2) Besteht das Fließige aus Blätchen von verschiedener Dichte: so wird der Druck auf CD durch das Produkt von CD in die Summe der spezifischen oder eigenthümlichen Schweren aller Blätchen vorgestellet.

Ich sage der eigenthümlichen Schweren, nicht der Gewichter, weil der Druck nicht von der Menge des Fließigen; sondern allein von der eigenen Schwere eines jeden Fadens abhängt.

Man muß wohl merken, daß das, was wir hier sagen, statt hat, das Gefäß mag sich aufwärts erweitern, oder verengern, wie Fig. 129. Der Druck, welchen das in ACDF eingeschlossene Fließige auf CD ausübet, ist derselbe, welchen der Zylinder ECDG ausüben würde, wenn er voll Wasser wäre.

602. Aus dem vorhergehenden ist leicht zu schlieſsen, daſs, wenn zwey flieſsige NHCBFL und EFLM (Fig. 230), deren jedes gleichartig ist, aber beide von verschiedener Dichte sind, in was immer für einem Gefäſse, in FL zusammen kommen, sie nicht im Gleichgewichte seyn können, als in so weit ihre Höhen EF, LK über der horizontalen Ebene der Zusammenkunft FL, sich in dem verkehrten Verhältniſs ihrer eigenthümlichen Schweren befinden. Denn da das flieſsige LFBCGO für sich selbst im Gleichgewichte seyn kann (598): so muſs, damit NHGO mit EFLM im Gleichgewichte stehen könne, der Druck, welchen NHGO von unten hinauf gegen FL ausübet, dem, welchen EFLM von oben hinab gegen FL ausübet, gleich seyn. Nun ist der Druck, welchen NHGO gegen FL ausübet, dem Gewichte eines Prisma oder Zylinders von dem Flieſsigen, welches IK zur Höhe und FL zur Grundfläche hätte, gleich. Dieſses Gewicht ist übrigens der eigenthümlichen mit der Gröſse multiplicirten Schwere gleich. Nennet man also dieſse eigenthümliche Schwere P: so wird es zu seinem Ausdrucke P × IK × FL haben. Aus dem nämlichen Grunde wird man, wenn des Flieſsigen EFLM eigenthümliche Schwere p ist, für sein Gewicht, oder den gegen FL ausgeübten Druck, p × EF × FL haben. Also muſs P × IK × FL = p × EF × FL, oder P × IK = p × EF seyn. Daher P : p = EF : IK; das ist: die Höhen EF, IK müssen in dem verkehrten Verhältniſs der eigenthümlichen Schweren stehen.

Wenn z. B. LFBCHN Queckſilber und EFLM Wasser wäre: so müſste, weil das Queckſilber vierzehnmal schwerer als das Wasser ist, die Höhe EF vierzehnmal gröſser als IK seyn, das Gefäſs mag eine Figur haben, was es für eine will.

603. Durch dieſs, was bisher gesagt worden, sieht man also, daſs der Flieſsigen Weise zu wirken, von der

festen Körper ihrer sehr unterschieden sey. Es ist nur, eigentlich zu reden, der Theil ECDG (Fig. 228), welcher seine Wirkung auf die Oberfläche CD machet; und die Oberfläche CD (Fig. 229) wird von ACDF, wie von dem ganzen Gewichte des in dem Zylinder ECDG enthaltenen Fließigen gedruckt: statt dessen, wenn dieses ein fester Körper wäre, wenn z. B. das Fließige ACDF zu Eis gefröre; der Boden einen Druck litte, welcher dem ganzen Gewichte ACDF, sowohl nach der 228 als 229 Fig. gleich wäre.

604. Aber man muß hier einen Unterschied machen, zwischen dem Drucke, den der Boden CD von dem Fließigen leidet, und demjenigen, was man zu halten hätte, wenn man das Gefäß tragen wollte. Es ist gewiß, daß wenn der Boden CD sich absonderte, man (Fig. 228) keine andere Gewalt brauchete ihn zu halten, als die dem Gewichte des Zylinders ECDG gleich wäre. Wollte man aber das Gefäß tragen; so müßte man eine Gewalt anwenden, welche dem Gewichte des in dem ganzen Gefäße enthaltenen Wassers gleich wäre. Dieses wird man einsehen, nach dem wir die Art den Druck gegen schiefe Ebenen und krumme Oberfläche zu entwickeln werden an die Hand gegeben haben.

605. Es sey ACDF (Fig. 231 u. 232) der vertikale Schnitt eines Gefäßes mit ebenen oder krummen Oberflächen, die gegen den Horizont beliebig geneigt seyn. Stellet man sich ein unendlich dünnes Blätchen abdc vor; so kann man seine Schwere bey Seite setzen, und selbiges als von dem obern Fließigen gedrückt ansehen. Dieser Druck breitet sich nun auf alle Punkte des Blätchens gleich aus, und wirket senkrecht und gleich auf einen jeden Punkt der Flächen ac, bd. Weil daher diese Kraft diejenige ist, welche der einzige Faden IK erzeuget (601): so wird der Druck, welcher auf bd senkrecht geschieht, durch bd × IK vorgestellet; und es

ist

ist augenscheinlich das nämliche, wenn man statt bd als eine unendlich kleine Line anzusehen, sie als eine unendlich kleine Fläche betrachtet.

606. Also wird überhaupt der Druck, welcher von einem schweren und gleichartigen Flieſsigen auf eine unendlich kleine Fläche (deren endliche Seite, wenn sie eine hat, horizontal ist) nach dem Produkte dieser Fläche in ihre Weite von der horizontalen Oberfläche AF, multiplicirt mit der eigenthümlichen Schwere des Flieſsigen geschätzet.

607. Also ist der ganze Druck, welcher auf was immer für eine Fläche geschieht, der Summe der Produkte dieser unendlich kleinen Theile der Fläche in ihre Weiten von der horizontalen Oberfläche, multiplicirt mit der eigenthümlichen Schwere des Flieſsigen gleich. Nun, nach der Eigenschaft des Mittelpunkts der Schwere, ist die Summe der Produkte eines jeden Theiles in seine Weite von einer festgesetzten Ebene, dem Produkte der ganzen Fläche in die Weite ihres Schwerpunktes von derselben Ebene gleich.

Folglich hat der Druck, welchen ein schweres Flieſsige gegen was immer für eine Fläche ausübet, zu seinem Maſse, das Produkt dieser Fläche in die Weite ihres Schwerpunktes von der horizontalen Oberfläche, multiplicirt mit der eigenthümlichen Schwere des Flieſsigen.

608. Da die Drücke auf die Punkte einer Ebene senkrecht auf der Ebene, folglich unter einander parallel sind: so muſs auch der zusammengesetzte oder ganze Druck mit ihnen parallel seyn. Da wir nun erst seinen Werth so wie die von seinen Theilen, bestimmet haben: so

wird

wird es nach dem, was (109) gesagt worden, wann es nöthig seyn wird, leicht zu bestimmen seyn, durch was für einen Punkt dieser zusammengesetzte Druck gehe. Er muß nicht, wie leicht einzusehen, durch den Schwerpunkt G dieser Fläche (Fig. 232) gehen, sondern etwas weiter unterhalb seyn. Nur in dem Falle, wo die Oberfläche (ihre Höhe) unendlich klein ist, kann man den ganzen Druck in ihrem Mittelpunkte der Schwere beysammen annehmen.

609. Sehen wir nun, was aus allen diesen vertikalen und horizontalen Drücken entsteht.

Eines Körpers Figur mag beschaffen seyn, wie sie will, man kann sich ihn allezeit als eine Verbindung von unendlich vielen untereinander parallelen Blätchen, und die Oberfläche des Umfangs eines jeden Blätchens, als eine Verbindung mehrerer Trapezlein, derer Anzahl bey der krummen Fläche unendlich ist, vorstellen. Also, um zu entwickeln, was aus dem Drucke eines Flüßigen gegen die innern Wände eines Gefäßes, oder gegen die äusere Oberfläche eines in das Flüßige eingetauchten festen Körpers, entstehe: so muß man suchen, was aus dem Drucke auf die Fläche eines Trapezes von einer unendlich kleinen Höhe entsteht.

Stellen wir uns also ein Trapez ABCD (Fig. 234) dessen parallele Seiten AB und CD sind, und dessen Höhe unendlich klein ist vor. In dem Mittelpunkte der Schwere G dieses Trapezes, sey senkrecht auf seine Ebene eine Kraft P angebracht, deren Werth durch das Produkt der Fläche dieses Trapezes in die Weite GG′ ihres Schwerpunktes von der horizontalen Ebene XZ ausgedrücket werde.

Um die Wirkung dieser Kraft, sowol nach der horizontalen als vertikalen Richtung zu bestimmen: so denke ich mir eine vertikale Ebene CDFE, welche durch die Line CD geht, und eine horizontale AFEB, welche durch die

Line

Line AB geht. Nachdem ich die Vertikallinen CE, DF gezogen, welche dieſe Ebene in E und F ſchneiden; ſo ziehe ich BE und AF. Endlich ſtelle ich mir eine Ebene KIH vor, welche durch der Kraft P Richtung GP geht, davon HIK und HI die Durchſchnitte der zwey Ebenen ABCD, FECD ſind; und worauf CD ſenkrecht ſey. Dieſe Ebene wird ſenkrecht auf den Ebenen ABCD, FECD ſeyn; weil CD ihr gemeinſchaftlicher Durchſchnitt iſt. Endlich zieh ich aus dem auf AB und HK genommenen Punkte K, die Linie KI ſenkrecht auf die Ebene FECD; mithin auch auf HI.

Dieſs vorausgeſetzt, zerlege ich die Kraft P in zwey andere, welche ſich in der verlängerten Ebene KHI befinden, deren eine GL horizontal oder ſenkrecht auf der Ebene FECD, und die andere GM vertikal iſt. Nenne ich alſo dieſe zwey Kräfte L und M, und mache das Parallelogramm GMNL auf der Line, GN, als der Diagonale; ſo habe ich P : L : M = GN : GL : GM, oder = GN : GL : LN. Da aber die Seiten des Dreyeckes GLN auf den Seiten des Dreyeckes KIH ſenkrecht ſind: ſo ſind dieſe zwey Dreyecke einander ähnlich; und es iſt GN : GL : LN = HK : HI : IK; folglich P : L : M = HK : HI : IK. Multipliciren wir dieſe drey letzten Glieder mit $\frac{AB+CD}{2} \times GG'$, welches ihr Verhältniſs nicht ändert, und wir haben P : L : M

$$= HK \times \frac{AB+CD}{2} \times GG' : HI \times \frac{AB+CD}{2} \times GG' : IK \times \frac{AB+CD}{2} \times GG'.$$

Beobachten wir nun 1) daſs $HK \times \frac{AB+CD}{2}$ die Oberfläche des Trapezes ABCD iſt. 2) daſs, weil CE und DF parallel ſind, und das nämliche bey CD und EF iſt,

CD

$CD = EF$ sey; daher $IK \times \frac{AB+CD}{2}$ das nämliche, was $IK \times \frac{AB+EF}{2}$ ist; nnd folglich die Oberfläche des Trapezes AFEB sey. 3) da man vorausgesetzet, daß des Trapezes ABCD Höhe unendlich klein sey; so kann EF, welches CD gleich ist, an die Stelle von AB und CD gesetzet werden, so daß $HI \times \frac{AB+CE}{2}$ sich auf $HI \times EF$ bringen läßt; welches die Oberfläche des Rechteckes ECDF ist. Also hat man $P : L : M = ABCD \times GG' : ECDF \times GG' : AFEB \times GG'$. Wir haben aber vorausgesetzt, die Kraft P werde durch $ABCD \times GG'$ ausgedrückt: folglich wird die Kraft L durch $ECDF \times GG'$; und die Kraft M, durch $AFEB \times GG'$ ausgedrückt

610. Denken wir nun, von den Winkeln A, D, C, B seyen Senkrechte auf die Ebene XZ gezogen. Man kann sich diese Senkrechten als die Kanten oder Ecke eines gestutzten Prisma vorstellen, dessen horizontale Grundfläche auf der Ebene XZ, der Fläche AFEB gleich wäre, und dessen schiefe Grundfläche ABCD ist. Da nun AB und CD unendlich nahe gesetzet werden: so ist der Inhalt dieses gestutzten Prisma anzusehen, als sey er von dem Inhalte desjenigen, welches dieselbe horizontale Grundfläche, und GG' zur Höhe hat, nicht unterschieden. Aber dieser letzte hat zum Ausdrucke $AFEB \times GG'$, welcher iust derjenige ist, den wir für die vertikale Kraft, M gefunden haben. Also hat diese Kraft zum Ausdrucke, auch den Inhalt eines gestutzten Prisma, welches zur schiefen Grundfläche, ABCD, und zur horizontalen Grundfläche den auf der horizontalen Ebene XZ entworfenen Grnnd von ABCD hat.

611. Bilden wir uns wirklich was immer für einen festen Körper ein, der in unendlich viele horizontale Blätchen geschnit-

schnitten ist, wie die ABDE abde (Fig. 235) sind; und daß senkrecht auf den Schwerpunkt der Oberfläche eines jeden der Trapeze, woraus die Oberfläche des Umfangs dieses Blätchens zusammengesetzt gedacht werden kann, solche Kräfte angebracht seyen, deren jede durch das Produkt der Fläche des zugehörigen Trapezes in die Weite ihres Schwerpunktes von der horizontalen Ebenen XZ vorgestellet wird. Diese Kräfte wären die Drücke, welche ein schweres Flieſsige auf die innere Oberfläche des Blätchens ABDE abde vom Gefäße, worin es enthalten, ausübete. Sie wären auch die Drücke, welche ein gleiches Flieſsige auf die äusere Oberfläche eines festen Körpers, der in selbes eingetaucht würde, ausübete. Nun haben wir erst gesehen, daß, wenn man diese Kräfte in zwey andere, eine vertikale, und horizontale, zerlegete, jede vertikale Kraft durch ein gestutztes Prisma, welches zur Grundfläche in der horizontalen Ebene XZ, des Trapezes Entwurf auf dieser Fläche, und zur schiefen Grundflache dieses Trapez selbst hätte, vorgestellet würde. Also wird die Summe der vertikalen Kräfte, oder die daraus entstehende einzige vertikale Kraft, durch die Summe aller dieser gestutzten Prismen vorgestellet werden; und da sich das nämliche von den horizontalen Blätchen versteht: so ist zu schlieſsen:

1) Wenn ein Gefäß von was immer für einer Figur ACDF (Fig. 227) mit einem Flieſsigen bis zu was immer für einer Line AF angefüllt wird: so entstehet aus allen Drückungen, die das Flieſsige auf einen jeden seiner Punkte ausübet, keine andere vertikale Kraft, als die durch den Inhalt oder vielmehr, durch das Gewicht des Flieſsigen, welches diese Gröſse einnimmt, vorgestellet wird.

2) Wenn ein solcher Körper als AEDBM (Fig. 236), dessen gröſster horizontaler Durchschnitt AIBF

ist,

ist, in ein Fließiges, auf was immer für eine Tiefe eingetaucht wird; und man den Druck, welcher auf den obern Theil AMB geschieht, nicht betrachtet: so ist die vertikale Gewalt des Fließigen ihn zu heben, dem Gewichte des Fließigen, gleich, welches zwischen der horizontalen Oberfläche XZ, der Fläche AIBFE und der erhabenen, von den aus allen Punkten des Umfangs AIBF auf die Ebene XZ gehenden Senkrechten gebildeten, Oberfläche enthalten ist.

Betrachtet man hernach den Druck, welcher auf die Fläche geschieht, welche über dem größten horizontalen Durchschnitte ist: so sieht man aus demselben Grunde, daß von dem Fließigen, Drücke auf diese Fläche geschehen, welche vertikal sind, um den Körper hinunter zu tauchen, mit einer Gewalt, welche dem Gewichte des Fließigen gleich ist, das zwischen derselben Fläche, der Fläche des Entwurfs A′F′ B′F′, und derjenigen, welche die von allen Punkten des Umfanges gezogenen Senkrechten bilden, enthalten ist. Zieht man also von der ersten vertikalen Gewalt, die andere ab: so sieht man, daß der Körper vertikal aufwärts, mit einer Gewalt beweget werde, welche dem Gewichte des Fließigen gleich ist, davon er den Platz einnimmt.

612. Wir schließen also allgemein, daß, **wenn ein Körper in was immer für ein Fließiges getaucht wird, er von seinem Gewichte einen Theil verliere, welcher dem Gewichte des Fließigen gleich ist, das er aus der Stelle jagt.**

613. Nun bleiben uns noch zwey Dinge zu untersuchen über: das erste ist, zu wissen, durch welchen Punkt die aus des Fließigen Drückungen entstandene vertikale Ge-

walt gehe: das zweyte, was aus den horizontalen Kräften werde.

Was das erste betrifft: so ist es leicht einzusehen, daß diese vertikale Gewalt durch den Schwerpunkt des aus der Stelle zujagenden Flieſsigen gehen müsse. Stellet man sich wirklich dieses Flieſsige in unendlich viele vertikale Fäden zerlegt vor: so wird die Gewalt, welche das Flieſsige ausübet, um jeden Faden vertikal zu drücken, durch das Gewicht des Flieſsigen, welches diesem Faden gleich ist, ausgedrücket. Um also die Weite der zusammengesetzten Kraft von was immer für einer vertikalen Ebene zu bekommen, muß man die Masse eines jeden Fadens des Flieſsigen mit der Weite von dieser Ebene multipliciren, und die Summe, dieser Produkte durch die Summe der Faden dividiren: welches just die Methode ist, den Schwerpunkt zu finden. Folglich geht überhaupt **der vertikale Druck eines Flieſsigen auf einen darin eingetauchten Körper allezeit durch den Schwerpunkt des aus der Stelle zujagenden Flieſsigen.**

614. **Nun wollen wir sehen, was aus den horizontalen Kräften werde, wovon wir oben geredet.**

Stellet man sich das feste Blätchen der 235 Fig. vor, und daß durch die Seiten ab, bc, ꝛc. des untern Schnittes vertikale Ebenen gehen, welche sich an dem obern Schnitte endigen: so werden diese Ebenen den Umfang eines Prismes machen, welches zur Höhe die vom Blätchen haben wird; und jede Fläche dieses Prisma wird (609) durch ihre Gröſse den Werth ihrer horizontalen Kraft ausdrücken. Da aber diese Flächen alle von einerley Höhe sind; so verhalten sie sich wie ihre Gründlinen ab, bc, ꝛc. Folglich verhalten sich die horizontalen Kräfte, wie die Seiten, ab, bc, ꝛc. Uebrigens mögen diese Kräfte an einem Orte der Flächen angebracht seyn, wo sie wollen; man kann sie, da diese Flächen von einer unendlich kleinen Höhe sind, al-

le

le ansehen, als wären sie alle an der horizontalen Ebene abcdef, jede in der Mitte der Seite, die der zugehörigen Fläche des Prisma, wovon die Rede ist, senkrecht angebracht. Ich sage in der Mitte; weil es leicht einzusehen, daß der zusammengesetzte Druck, welcher auf die Oberfläche was immer für eines der Trapeze, welche die Oberfläche des Blätchens ausmachen, geschieht, durch einen der Punkte von der Line gehen muß, welche die Mittelpunkte der zwey parallelen Seiten zusammenhängt. Die Frage ist also dahin gebracht, zu wissen, was mit was immer für einem Vielecke (Fig. 237) geschehen müsse, wann eine jede von seinen Seiten, durch eine ihrer Mitte senkrecht angebrachte Kraft, derer Werth die Seite vorstellet, gezogen oder gestoßen wird. Wir werden sehen, daß sie sich gegenseitig aufheben.

Betrachen wir zuerst nur die zwey Kräfte P und Q (Fig. 238) welche in den Mittelpunkten der zwey Seiten AB, AC des Dreyeckes ABC angebracht, und durch diese zwey Seiten vorgestellet werden. Da ist klar, daß ihre Zusammengesetzte durch den Punkt F ihres Zusammenlaufes, welcher im gegenwärtigen Falle der Mittelpunkt des durch die drey Punkte A, B, C beschriebenen Zirkels ist, gehen muß. Ich habe anderwärts gesagt, sie müsse mitten durch die Seite BC gehen, auf welcher sie folglich senkrecht ist, und sie werde durch diese Seite BC vorgestellet.

In der That, wenn man die Kraft P in zwey andere zerlegt, deren eine De parallel, und die andere Dh senkrecht gegen die Seite BC ist; und das Parallelog amm Degh macht: so hat man, wenn diese zwey Kräfte e und h heißen, P: e: h = Dg: De: Dh = Dg: De, ge. Fället man nun die Senkrechte AO; so ist das Dreyeck geD dem Dreyecke AOB ähnlich: weil ihre Seiten senkrecht gegeneinander sind. Man hat also Dg: De: ge = AB: AO: BO; daher P: e: h = AB: AO: BO. Nun wird, nach der Voraussetzung der Werth von der Kraft P

durch AB vorgestellet; folglich der von e durch AO; und der von h durch BO.

Zerlegt man gleichfalls die Kraft Q in zwey andere, deren eine Im parallel, und die andere Ik senkrecht gegen die Seite BC ist, so wird man auf dieselbe Weise zeigen, daß m durch AO, und k durch CO vorgestellet werde. Die zwey Kräfte m und e sind also gleich; weil sie durch dieselbe Line AO vorgestellet werden. Nebst dem wirken sie nach entgegengesetzten Gegenden, in derselben Line DI, parallel mit BC; indem D und I die Mittelpunkte von AB und AC sind: folglich heben sie sich gegeneinander auf. Die Zusammengesetzte muß also das seyn, was die zwey Kräfte h und k sind. Und da diese parallel sind, weil sie senkrecht auf BC, und ohne dieß nach derselben Gegend wirken: so muß ihre Zusammengesetzte ihrer Summe gleich, und senkrecht auf BC seyn. Folglich wird sie 1) durch BO + OC = BC vorgestellet. 2) Da sie senkrecht auf BC ist; und nebst dem, wie schon gesagt, durch des um ABC beschriebenen Zirkels Mittelpunkt F gehen muß; so geht sie durch die Mitte BC.

Dieß vorausgesetzt: so ist die Zusammengesetzte V (Fig. 237) von den zwey Kräften P und T senkrecht auf die Mitte von BE und durch BE vorzustellen. Aus demselben Grunde ist die Zusammengesetzte X von den zwey Kräften V und S, folglich von den dreyen P, T, S, senkrecht auf die Mitte von BD, und durch BD vorzustellen. Endlich ist die Zusammengesetzte Y von den zwey Kräften X und Q, und folglich die von den viren p, T, S, Q senkrecht auf die Mitte von DC, und durch DC vorzustellen. Folglich ist diese der Kraft R gleich, und gerad entgegengesetzt. Daher heben sich alle diese Kräfte auf.

Man sieht, daß dieselben Schlüsse gelten; es mag die Zahl und Größe der Seiten seyn, wie da will.

Also überhaupt, heben sich die horizontalen Kräfte, welche aus dem Drucke entstehen, den ein Fliessiges gegen die Oberfläche eines in dasselbe eingetauchten Körpers senkrecht ausübet, gegeneinander auf.

615. Dieß sind die Grundsätze, welche dienen, die Wirkungen des Druckes der Fließigen auf die Gefäße, die sie einschließen, und auf die Körper, die man da eintauchet, zu bestimmen. Sehen wir nun den Nutzen dieser Grundsätze.

Weil die Kräfte, welche das Fließige nach der horizontalen Richtung hervorbringet, sich gegenseitig aufheben: so wird um einen Körper in der Stellung, welche man ihm in einem Fließigen gegeben hat, zu erhalten, nichts anders erfodert, als die vertikale Gewalt des Druckes zu heben. Dieß erfodert zwey Dinge: das erste, daß man dem Drucke, welchen das Fließige von unten hinauf ausübet, eine gleiche Gewalt von oben hinab entgegen setzet: zweytens daß diese Gewalt mit dem Drucke des Fließigen in einer geraden Line geschehe. Nun des Fließigen Druck aufwärts, ist dem Gewichte des aus seiner Stelle getriebenen Fließigen, gleich: folglich **wird der eingetauchte Körper, wenn das aus der Stelle getriebene Fließige mehr als er wiegt, schwimmen, und sich erheben** (da er frey ist) bis das Fließige, welches mit dem eingetauchten Theile gleiche Größe (gleiches Volumen) hat, mit dem ganzen Körper gleichviel wiegt.

616. Wenn man also, da ein Körper schwimmet, etwas von seinem Gewicht wegnimmt, oder hinzu thut; so erhebt er sich, oder taucht sich tiefer ein, bis die Verminderung oder Vermehrung des Gewichtes des aus der Stelle getriebenen Fließigen dem neuen, weggenommenen oder hinzugethanen Gewichte gleich wird. Ist das hinzugesetzte oder weggenommene Gewicht, in Betracht des Gewichtes

des aus der Stelle getriebenen Flieſsigen klein: so wird die Gröſse IK (Fig. 239), um welche sich der Schnitt AB erniedriget oder erhöhet, um so viel kleiner seyn, als dieses Gewicht kleiner; und zugleich dieser Schnitt AB gröſser ist. Man kann also, wann dieses Gewicht klein, und der Schnitt AB groſs ist, AB und ab als gleich ansehen, und das aufs neue aus der Stelle getriebene Flieſsige durch das Produkt der Oberfläche AB in IK entwickeln. Ist also p das Gewicht von einem Kubikschuh des Flieſsigen: so wird das Gewicht des aus der Stelle getriebenen Flieſsigen $p \times AB \times IK$ seyn, da $AB \times IK$ in Kubikschuhen entwickelt wird. So ist, wenn das hinzugethane oder weggenommene Gewicht P ist, $p \times AB \times IK = P$. Daraus zieht man $IK = \frac{P}{p \times AB}$

**Z. B. bey einer Fähre** (ponton) **zu wissen, wie viel eine gewisse Vermehrung der Last, die Fähre hinabrauche**, muſs man den Werth P dieser Vermehrung, durch die Oberfläche des dem Wasser gleich gemachten Schnittes, die nach Quadratschuh geschätzet und mit dem Gewichte eines Kubikschuh Wassers multipliciret worden, dividiren.

617. Man kann die Gröſse eines Körpers nach Belieben vermehren, so daſs sein Gewicht dasselbe bleibt. Es ist also keine Materie so schwer, daſs man sie nicht könne schwimmen machen.

618. Da ein Körper, wann man sein Gewicht mindert, ohne seine Gröſse zu ändern, sich mit einer Gewalt heben muſs; welcher nichts, als ein gleiches Gewicht, so ihm entzogen worden, das Gleichgewicht halten kann: so folget, daſs man den vertikalen Druck des Wassers nützlich anwenden kann, Lasten zu heben; z. B. Kanonen aus der Tiefe des Meeres oder der Flüsse, wo sie versunken wären, zu ziehen: indem man sie an

eini-

einige Schiffe bindet, die man anfangs mit schweren Körpern, oder Wasser belädt, und hernach ausleeret.

619. Ueberhaupt, wenn P die eigenthümliche Schwere eines schwimmenden Körpers, oder das, was z. B. ein Kubikschuh dieses gleichartigen Körpers wiegt, V sein Volumen oder Größe; p die eigenthümliche Schwere des Fließigen: u die Größe des eingetauchten Theiles wäre: so würde das Gewicht dieses Körpers $P \times V$ oder PV; das von dem aus der Stelle getriebenen Fließigen pu; und $PV = pu$ seyn. Diese Gleichung giebt $u = \frac{PV}{p}$. Daraus sieht man, daß, wann das Gewicht PV des Körpers dasselbe bleibt, der eingetauchte Theil allezeit um soviel kleiner sey, als die eigenthümliche Schwere des Fließigen größer ist.

620. Diese nämliche Gleichung giebt $V : u = p : P$; das heißt: die Größe des Körpers, und die vom eingetauchten Theile sind in der verkehrten Verhältniß der eigenthümlichen Schwere des Körpers und der vom Fließigen.

621. Nach diesem Grundsatze werden gewisse **Areometer** oder **Wasserwagen** verfertiget. Dieß sind Instrumente, welche durch die Größe, um welche sie sich in gewisse Fließige eintauchen oder darin heben, die eigenthümlichen Schweren dieser Fließigen zu erkennen geben.

Um davon einen Begriff zu geben, stellen wir uns vor, der hole Zylinder ABCD (Fig. 240) welcher unten in DC mit einer schweren Materie beladen ist, um die vertikale Stellung zu erhalten, sey in ein Fließiges getaucht, und erhalte sich selbst nach der Eintauchung des Theiles ED. So ist man sicher (612), daß das Fließi-

ge, davon EDCF die Stelle einnimmt, so viel als der ganze Körper ADCB wege. Kennet man also das ganze Gewicht des Körpers ADCB; so hat man das Gewicht von dem Flieſsigen, welches in der Gröſse dem Zylinder EDCF gleich ist. Entwickelt man also den Inhalt oder die Gröſse EDCF, z. B. in Kubikzollen, und das Gewicht von ADCB in Unzen; und dividiret das Gewicht von ADCB durch die Zahl der Kubikzolle von EDCF: so wird der Quotient das ausdrücken, was ein Kubikzoll des Flieſsigen, wovon die Rede ist, wiegt.

Nachdem man also die eigenthümliche Schwere eines Flieſsigen bestimmet hat, so bestimmet man die von andern viel geschwinder, da man nach denselben Grundsätzen allezeit fortschreitet.

Stellen wir uns vor, die Seite AD sey in viel kleine gleiche Theile getheilet, und man habe den Punkt E bemerket, wobey der Zylinder in dem Flieſsigen stehen bleibt, welches zum ersten Versuche gedienet hat. Thut man hernach den Zylinder in ein anderes Flieſsige; und er taucht sich um die Gröſse Ee mehr oder weniger ein: so schlieſset man, daſs das andere Flieſsige um so viel eigentlich leichter oder schwerer, als das erste sey; und zwar, daſs die eigenthümliche Schwere des ersten zu der vom andern sich wie De zu DE, wie umgekehrt die eingetauchten Theile, verhalte. Vergleichet man also die Zahlen der Theile von DA, welche DE und De enthalten; so hat man das Verhältniſs der eigenthümlichen Schweren der zwey Flieſsigen. Oder aber, will man in dem Punkte E die eigenthümliche Schwere des Flieſsigen, mit welchen man die andern vergleichen will, anmerken; und in den verschiedenen Punkten e, die eigenthümlichen Schweren andrer Flieſsigen, in die sich die Wasserwage bis e eintauchet, anschreiben: so theile man die Zahl der gleichen Theile von DE durch die Zahl der gleichen Thei-

le von De, und multiplicire den Quotienten durch die eigenthümliche Schwere, welche sich auf den Punkt E bezieht; und man erhält die eigenthümliche Schwere, welche sich auf den Punkt e bezieht; das ist die Zahl, welche man zu e schreiben muß, um die eigenthümliche Schwere des Fließigen anzudeuten, in welches sich der Zylinder bis zu dieser Abtheilung eintauchet.

Wollte man aber die eigenthümlichen Schweren der Fließigen, welche in der Dichte wenig unterschieden sind, mit einander vergleichen: so ist es klar, daß der Unterschied der Eintauchung um so viel kleiner ist, als der Dichte Unterschied selbst kleiner, und des Zylinders Durchmesser größer ist. Man müßte alsdann einen Zylinder von einem sehr kleinen Durchmesser anwenden. Aber um demselben die Festigkeit, oder das Vermögen sich in der vertikalen Stellung zu erhalten, zu verschaffen: so könnte man ihn, wie Fig. 241 zu sehen, an einen andern Zylinder GHIK, der mit Gewichtern beschwert ist, wie oben gesagt, anmachen.

Uebrigens ist es auch nicht nöthig, daß der Theil GHIK, noch der Theil ABCD zylindrisch sey. Der Theil GHIK kann eine Gestalt haben, was für eine man will; wenn sie nur die Festigkeit gewähret; und der Theil ABCD kann prismatisch, von was immer für einer Figur, seyn. Es ist genug, daß er so beschaffen, daß gleiche Theile von der Größe ABCD mit gleichen Theilen der Länge AC übereinstimmen; so daß man dem Areometer die Gestalt, welche Fig. 242 zu sehen, geben kann.

Man kann die Zurichtung und Gestalt dieser Instrumente, nach den nämlichen Grundsätzen, unendlich verändern. Aber nach dem, was gesagt worden, werden wir keines andern Erwähnung thun, als dessen, so Fig. 242 vorgestellet wird. Der vorige Areometer ist bestimmt,

stimmt, die eigenthümliche Schwere der Flieſsigen durch die verschiedenen Eintauchungen anzuzeigen; dieser zeiget sie durch gleiches Eintauchen an.

ABCD ist eine Art von Flaschen mit einem langen Halse, in ihrem untern Theile C mit etwas Queksilber beschwert. Das obere Ende A trägt eine Schale, die bestimmt ist, verschiedene kleine Gewichter aufzunehmen. E ist ein Zeichen, welches den Punkt bedeutet, bey welchem die Wasserwage mit ihrem Gewichte allein, in den Flieſsigen von der leichtesten Art, stehen bleibt.

Tauchet man diese Wasserwage in ein anderes Flieſsige von schwererer Art: so wird sie sich heben; und nur mit Zulegung gewisser Gewichtlein, zu gleichem Eintauchen gebracht werden. Die Gröſse dieser zugelegten Gewichter giebt den Unterschied der eigenthümlichen Schwere zwischen diesem und dem ersten Flieſsigen zu erkennen. Kennet man also die eigenthümliche Schwere des ersten; so hat man die von jedem andern.

622. Wiegt der Körper mehr, als das Flieſsige von gleicher Gröſse; so muſs er untergehen; und er kann nicht gehalten werden, als durch eine Kraft, welche dem Ueberschuſs seines Gewichtes über das vom Flieſsigen von dieser Gröſse gleich ist. Stellen wir nun allezeit durch p und P die eigenthümlichen Schweren des Flieſsigen und des Körpers vor; und durch V die Gröſse des Körpers; so haben wir PV—pV zum Ueberschusse des Gewichts des Körpers über das vom Flieſsigen von derselben Gröſse. Stellt man sich also vor, dieser Körper werde mittelst eines Fadens vom Wagbalken, wie man Fig. 243 sieht, gehalten; und P′ sey das Gewicht, mit welchem er im Gleichgewichte stehen kann: so hat man $P' = PV - pV$. Daraus zieht man $\frac{p}{P} =$

$= \frac{PV - P'}{PV}$. Nun ist PV des Körpers Gewicht in der Luft, und P' sein Gewicht im Wasser, oder Fliessigen.

Kennet man also eines Körpers Gewicht in der Luft, wie auch das, so er noch im Fließigen hat, so bekömmt man leicht das Verhältniß der eigenthümlichen Schweren dieses Fließigen und des Körpers: indem man den Unterschied dieser zwey Gewichter durch das Gewicht des Körpers in der Luft dividiret.

Z. B. es wiegt ein Körper in der Luft 6 Unzen, und im Wasser 5 Unzen: so theile ich den Unterschied 1 durch 6; und der Quotient $\frac{1}{6}$ zeigt an, daß die eigenthümliche Schwere des Körpers sich zu der vom Fließigen, wie 6 zu 1 verhalte.

Die Luft, als ein fließiger Körper, vermindert der Körper Gewicht auch etwas; so daß das Gewicht, welches sie in der Luft haben, nicht das wirkliche ist. Allein, da die Luft ein sehr feiner Körper ist, dessen eigenthümliche Schwere zu der vom Wasser, ungefähr, wie 1 zu 850 ist: so hat man just nicht nöthig auf die von ihr verursachten Verminderung der Schwere acht zu geben.

623. Stellt man sich vor, daß der nämliche obige Körper in ein anderes Fließige getaucht werde, dessen eigenthümliche Schwere p' ist; und daß P'' das Gewicht sey, mit welchem er alsdann die Wage halte; so daß man $P'' = PV - p'V$ habe; wie vorher $P' = PV - pV$: so geben diese zwey Gleichungen $pV = PV - P'$ und $p'V = PV. - P''$. Theilet man diese

leß-

leſste durch die erſte; ſo hat man $\frac{p'}{p} = \frac{PV - P''}{PV - P'}$. Kennet man daher das Gewicht PV des Körpers in der Luft, wie auch ſein Gewicht P′ in dem einem, und ſein Gewicht P″ in dem andern Flieſsigen; ſo beſtimmet man leicht $\frac{p'}{p}$, das iſt, das Verhältniſs der eigenthümlichen Schweren der zwey Flieſsigen.

Nach dieſen Grundſätzen kann man eine Tafel der eigenthümlichen Schweren von verſchiedenen, ſowohl feſten als flieſsigen Körpern, verfertigen: dergleichen man eine am Ende dieſes Werkes finden wird.

624. Nach dem, was wir bisher geſehen haben, giebt die eigenthümliche mit des Körpers Gröſse multiplicirte Schwere ſein ganzes Gewicht. Aber die mit der Gröſse multiplicirte Dichte giebt die Maſſe (23), welche dem Gewichte proportional iſt (39). Alſo iſt die eigenthümliche mit der Gröſse multiplicirte Schwere, der mit der Gröſse multiplicirten Dichte proportional. Daher iſt die eigenthümliche Schwere der Körper, ihrer Dichte proportionirt.

625. Kehren wir zu den ſchwimmenden Körpern zurück. Damit ein Körper auf einem Flieſsigen, im Gleichgewichte bleiben könne, wird erfodert, wie wir (615) geſehen, daſs ſein ganzes Gewicht dem aus der Stelle getriebenen Flieſsigen Gleich ſey. Allein dieſe Bedingung iſt nicht genug.

Es wird noch erfodert, daſs die Line, welche durch des eingetauchten Körpers Schwerpunkt, und durch den Schwerpunkt des eingetauchten Theiles geht, vertikal ſey.

Denn des Körpers Schwere, und der Druck des Fließigen wirken beide nach einer vertikalen Line, davon die erste durch den Schwerpunkt des Körpers, und die andere durch den Schwerpunkt des aus der Stelle zutreibenden Fließigen geht; sie können daher einander nicht gerad entgegengesetzet seyn, wie zum Gleichgewichte erfodert wird, als in so weit diese zwey Vertikalen zusammen kommen.

626. Um also zu bestimmen, ob ein Körper ACEDB (Fig. 244) von einer bekannten Gestalt und Materie, auf einem Fließigen, in einer beliebigen Stellung, im Gleichgewichte bleiben könne: muß man eine horizontale Ebene CD ziehen, welche einen Theil CED absondert, dessen Größe sich zur ganzen Größe AEB verhalte, wie die eigenthümliche Schwere des Körpers zu der vom Fließigen; alsdann den Schwerpunkt C vom Ganzen AEB, und den G′ vom Theile CED bestimmen. Ist sodann die Line G′G senkrecht auf der Ebene CD; so findet das Gleichgewicht statt.

627. Wir setzen hier bey dem, was wir sagen, zum voraus, daß der Körper AEB gleichartig sey; das ist, daß die Materie, welche sein Gewicht ausmacht, ganz von einerley Art, und gleichförmig in dem ganzen Raume, welchen der Körper einnimmt, ausgebreitet sey. Wäre der Körper nicht so beschaffen: so berechnete man den Werth der Größe des Fließigen, welches dem Gewichte nach, dem ganzen von AEB gleich wäre; und machete CED dieser Größe gleich, da CD horizontal ist: welches man nach der Geometrie ausführen kann.

628. Es ist noch eine andere Frage, die man nach denselben Grundsätzen auflösen kann: nämlich die verschiedenen Stellungen zu bestimmen, in welchen ein Körper auf einem Fließigen im Gleichgewichte bleiben kann.

Allein, da wir keine wesentliche Anwendung davon zu machen haben; so halten wir uns dabey nicht weiter auf.

629. Ist der Körper CED (Fig. 245) auf dem Flieſsigen, dessen Oberfläche AB ist, wirklich im Gleichgewichte; und G der Schwerpunkt dieses Körpers; und G′ der vom eingetauchten Theile AEB; und man wendet in Gedanken den Körper unendlich wenig, so daſs aEb der eingetauchte Theil werde, davon G″ der Schwerpunkt sey: so wird dieser Körper in seine erste Lage zurück gehen, wann die Vertikale G″M der zweyten Stellung die Vertikale G′M der ersten Stellung über des Körpers Schwerpunkte G schneidet; hingegen ganz umstürzen, wann der Schnitt unter G in M′ geschieht.

In der That, geht die Richtung G′M, welche der Druck des Wassers alsdann haben wird, und die vertikal seyn wird, nicht durch des Körpers Schwerpunkt G; so strebt er dem Körper zwey Bewegungen einzudrücken; eine, um den Schwerpunkt zu heben, welche durch des Körpers Gewicht zerstöret wird; die andere, um den Körper um den Schwerpunkt zu drehen. Nun ist leicht einzusehen, daſs, wenn der Punkt G unter dem Punkte M ist, diese Kreiſsbewegung um G von A nach C trachte, und folglich den Punkt G′ in die wirkliche Vertikale G″M zu bringen suche. Ist hingegen der Punkt M′ unter G: so trachtet die Kreiſsbewegung um G, von C nach A; und folglich den Punkt G′ von G″ zu entfernen; das ist, den Körper umzustürzen.

Damit also der Körper in seine erste Lage zurück kehren könne, muſs G′M gröſser als G′G seyn.

Der Punkt M heiſset **Metacentrum** (**Obermittelpunkt**): weil dieser die Gränze der Höhe ist,

auf

auf die der Mittelpunkt der Schwere G gesetzet werden kann, auf daß der schwimmende Körper, durch eine kleine Neigung, nicht umstürze. Denn wäre G nur ein wenig über M; so stürzete der Körper um.

## Von elastisch flüßigen Körpern.

### 630.

Die elastischen Flüßigen haben das mit den unelastischen Flüßigen gemein, daß der Druck sich nach allen Gegenden mittheilt. Aber sie sind von diesen darin unterschieden, daß sie sich zusammen drücken lassen, und nach dem Drucke wieder ausdehnen: welches die unelastischen nicht thun. Ist z. B. (Fig. 246) in einem Gefäße ABDC ein elastisches Flüßige enthalten; und es wird durch das Gewicht P, welches auf den beweglichen Boden AB gelegt wird, zusammen, in den Raum abDC gedrückt: so hebt es diesen Boden wieder in AB, sobald das Gewicht weggenommen wird. Das unelastische Flüßige hingegen würde durch das Gewicht seinen Raum gar nicht mindern; folglich, nach dem Drucke sich auch nicht ausdehnen.

Es sey wie ihm wolle, die Weise, wie sich der Druck ausbreitet, ist allezeit die nämliche, wie bey den unelastischen Flüßigen; das ist, er geschieht allezeit senkrecht auf die Oberflächen; und in den schweren elastischen Flüßigen, die nur durch die Wirkung ihrer Schwere zusammengedrücket werden, zernichten sich die Wirkungen des Druckes gegen die Wände des Gefäßes, oder gegen die Flächen der eingetauchten Körper, die horizontalen nämlich, einander; und die vertikalen Wirkungen lassen

sich

sich auf eine bringen, deren Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers geht, gegen welchen sie das Flieſsige ausübet.

631. Was den ganzen Werth des Druckes von der Schwere allein eines elastischen Flieſsigen gegen was immer für eine Oberfläche betrifft: so ist kein Zweifel, daſs der auf horizontale Flächen, da sonst alles gleich ist, diesen Fächen proportional sey. Allein er läſst sich nicht, wie bey andern Flieſsigen, durch das Gewicht eines Prisma oder Zylinders, davon diese Oberfläche die Grundfläche und die Weite von dieser Fläche bis zur obern Oberfläche des Flieſsigen Höhe wäre, messen.

In der That, wenn ein elastisches Flieſsige also beschaffen ist, daſs es ohne seine Schwere den Raum AEFB (Fig. 247) einnehmen könne: so ist es augenscheinlich, daſs, wann man es schwer seſset, die Blätchen von diesem Flieſsigen, welche näher beym Boden EF, und von ihrem und der Obern Blätchen Gewichte beschweret sind, mehr zusammen gedrücket werden, als diese; und folglich, auch dichter und schwerer als diese sind. Da also die gleichdicken Blätchen den Boden EF um so viel weniger beschweren, als sie weiter davon entfernt sind: so muſs der Druck auf den Boden BF nicht allein nach der Gröſse dieses Bodens und nach der Zahl der von D bis F enthaltenen Blätchen; sondern auch nach der eigenthümlichen Schwere eines jeden Blätchens, welche von Ort zu Ort unterschieden ist, geschätzet werden. Stellet man also durch x die Weite FQ was immer für eines Blätchens vom Boden EF; durch dx die unendlich kleine Dicke dieses Blätchens, und durch D seine eigenthümliche Schwere oder Dichte vor: so ist Ddx das Gewicht eines Fadens von diesem Blätchen; und seine Wirkung auf EF wird EF × Ddx; folglich die Wirkung von allen Blätchen, oder der ganze Druck auf EF, EF∫Ddx; nämlich das Integrale von Ddx, multiplicirt

mit

mit EF. Man muß also den Werth von D durch x kennen, nach welchem Gesetze nämlich sich die Dichte der Blätchen, bey ihrer Entfernung von dem Boden EF, ändere.

Hat man den Druck auf eine Horizontalfläche bestimmet; so ist es leicht den Druck auf eine jede andere Fläche zu bestimmen: indem man diese Fläche in unendlich kleine Theile theilet; und den Druck bey einem jeden solchen Theile betrachtet, als wenn dieser Theil horizontal wäre: welches seyn kann.

632. Aus allen elastischen Flieſsigen ist die Luft dasjenige, an welchem uns am meisten gelegen ist. Darum wollen wir ihre vornehmsten Eigenschaften betrachten; wenigstens diejenigen, welche sich für unsern Gegenstand am beſsten schicken.

633. **Die Luft ist schwer.** Dieß ist eine durch viele Versuche bestätigte Wahrheit. Hier sind einige.

Man nimmt eine gläserne Röhre (Fig. 248), ungefähr von 30 Zoll in der Länge, die an einem ihrer Ende A hermetisch geschlossen; und füllet sie durch das andere offene Ende voll Queckſilber an; tauchet sodann dieses offene Ende B in ein Gefäß mit Queckſilber; und richtet die Röhre ganz vertikal auf. Hierauf fällt das Queckſilber in der Röhre, bis die zurückgebliebene Säule ungefähr $27\frac{1}{2}$ Zoll beträgt, von der Oberfläche des Queckſilbers in dem Gefäße an gerechnet.

Diese Höhe verändert sich nach dem Zustande der Luft und der Höhe des Ortes, wo der Versuch geschieht. Das gegenwärtige geschieht bey dem mittlern Zustande der Luft, auf der Höhe, wie ungefähr Paris, mit wohl gereinigtem Queckſilber.

Hier sieht man, wie dieser Versuch die Schwere der Luft beweiset. Die in CB enthaltene Queckſilbersäule, machet in dem Punkte B einen Druck auf das untere Queckſilber, dem das Gleichgewicht nicht gehalten werden kann, ausgenommen durch eine gleiche, in entgegengeſetzter Richtung wirkende Gewalt. Nun das in dem Gefäße, wo die Röhre eingetaucht iſt, enthaltene Queckſilber, wirket nur nach der Verhältniß der Weite ſeiner Oberfläche von der Oeffnung B; alſo kann es nicht das Gegengewicht machen. Man kann daher niergends die nöthige Gewalt ſuchen, als in dem Flieſsigen, welches auf allen Punkten der obern Fläche des in dem Gefäße enthaltenen Queckſilbers ruhet; nämlich in der Luft. Alſo iſt es die Luft, welche mit ihrer Schwere der Queckſilberſäule das Gleichgewicht hält.

Hier iſt noch eine andere Begebenheit, welche uns nützlich und zur Stütze ſeyn kann. Wenn die Luft dieſe Säule BC unterhält: ſo muß, im Falle wir ein Flieſsiges, das leichter als Queckſilber iſt, anwenden, die Höhe, auf welcher es ſtehen bleibt, gröſser als BC ſeyn; und zwar beide in dem verkehrten Verhältniſſe der eigenthümlichen Schweren dieſer Flieſsigen ſtehen (602). Nun weis man, daß das Queckſilber vierzehnmal ſchwerer als das Waſſer iſt. Alſo muß, wenn man Waſſer ſtatt des Queckſilbers brauchet, die Waſſerſäule, die von der Luft erhalten wird, vierzehnmal ſieben und zwanzig und einen halben Zoll, das iſt, ungefähr zwey und dreyſsig Schuh hoch ſeyn. Dieſs beſtätiget wirklich die Erfahrung. Denn man weis, daß, wenn man mittelſt eines Kolbens in einem einfachen Saugwerke, Waſſer über zwey und dreyſsig Schuh heben will, es allezeit bey dieſer Höhe beynahe ſtehen bleibt. Man kann alſo nicht zweifeln, daß die Luft ſchwer ſey; und daß ſie aus dem Grunde die Oberfläche der Körper ſoviel, als eine Waſſerſäule von zwey und dreyſsig Schuh, drücke.

Die-

Dieſer Druck, der bey allen Körpern, folglich auch bey der Oberfläche des Waſſers geſchieht, zwinget das Waſſer in den Saugwerken zu ſteigen, wann man den Kolben in die Höhe zieht, und zwiſchen dem Kolben und dem Waſſer, worin das Saugwerk ſteht, einen leeren Raum machet. Uber um deutlichere Begriffe von der Art und Weiſe, wie ſich das Waſſer in den Saugwerken hebet, zu bekommen: ſo müſſen wir eine andere Eigenſchaft der Luft unterſuchen. Dieſs iſt ihre Elaſticität.

634 Die Luft läſst ſich zuſammendrücken; iſt elaſtiſch; und die Räume, in welche ſie durch den Druck gebracht werden kann, ſtehen merklich in dem verkehrten Verhältniſſe der Gewichter, von welchen ſie beſchweret wird.

Dieſs iſt eine durch folgenden Verſuch ausgemachte Sache. In eine krumme Röhre ABC (Fig. 249), davon der eine Theil AB wenigſtens dreyſsig bis vierzig Zoll lang, und der andere BC durchaus von gleicher Weite, und in C hermetiſch geſchloſſen ſeyn muſs, läſst man Queckſilber laufen, bis der unterſte Raum B voll iſt. Hernach hält man dieſe Röhre an eine in Grade getheilte Platte, und merket die Zahl der Abtheilungen zwiſchen B und C. Ich ſetze hier, daſs ſie acht Zoll ſey. Darauf gieſset man Queckſilber in die Röhre AB, bis der Unterſchied der Höhe des Queckſilbers in AB und BC der damaligen Höhe des Queckſilbers in dem Barometer, oder da man keinen hat, ungefähr ſieben und zwanzig und einem halben Zoll gleich ſey. Die Luft, welche anfangs den ganzen Theil BC inne hatte, wird nun nur die Hälfte einnehmen. Fährt man ſo fort Queckſilber in die Röhre AB zu gieſsen, bis daſs der Unterſchied der Höhen des Queckſilbers in den beiden Theilen der Röhre, zweymal ſo groſs iſt, als der erſte

war: so wird die Luft in BC nur den dritten Theil von BC einnehmen. Und sie wird nur den vierten Theil dieser Röhre BC einnehmen; wenn jener Unterschied der Höhe dreymal so groß ist, als der erste; u. s. f.

Dieser Versuch zeiget, daß die Luft sich, nach dem Maße, als sie beschweret wird, und beynahe nach dem Verhältniß der Gewichter, zusammendrücken lasse.

Denn, da kein Queckſilber in der Röhre, als nur in dem untern Raume B war: so war die Luft in BC von derselben Beschaffenheit, als die Luft in AB; und von einem Gewichte der Luftsäule beschwert; die mit der Oeffnung der Röhre übereinstimmet. Sie war also mit einem Gewichte beschwert, das der Queckſilbersäule im Barometer zukommt. Da nun mit Hinzusetzung eines, zweyer, dreyer und mehrerer ähnlicher Gewichter, die Luft sich in einen, zwey, drey, vier, und mehrmals kleinern Raum als BC zusammen drücken läßt: so läßt sie sich dann nach dem Verhältnisse der Gewichter, wovon sie beschweret wird, zusammendrücken.

Was die Federkraft der Luft betrifft: so versichert man sich durch ein umgekehrtes Verfahren, daß sie statt habe, und sich nach dem Verhältnisse des Druckes vermehre; oder nach dem Verhältnisse, als der Druck abnimmt, vermindere.

Denn, wenn man Queckſilber aus der Röhre AB herausnimmt: so vermehrt sich sichtbarlich die Ausdehnung der Luft in der Röhre BC; und zwar um so viel mehr; jemehr man Queckſilber wegnimmt. Die Luft läßt sich also nicht nur zusammendrücken; sondern sie trachtet auch, sich wieder herzustellen, und einen größern Raum einzunehmen, wann der Druck, oder das Gewicht, wodurch sie zusammengedrücket wird, abnimmt: und zwar verhalten sich die Räume, in welche sie zusammen-

gedrücket wird; wie umgekehrt die Drücke, oder die Gewichter, womit sie gedrücket wird.

635. Die Luft welche wir die **natürliche** oder **freye** nennen, wird also beständig gedrückt, und so zwar, daß, wenn sie auf einmal ihre Schwere verlöre, sie sich nach allen Seiten zu entfernen strebte, mit einer solchen Kraft, daß die in dem Raume ABC (Fig. 249) eingeschlossene Luft, bey der Oeffnung A, mit keiner kleinern Kraft erhalten werden könnte, als die dem Gewichte einer Queckſilbersäule von derselben Grundfläche als die Oeffnung, und der Höhe von $27\frac{1}{2}$ Zoll, gleich wäre.

636. Nach dem, was wir (630) über den Unterschied zwischen den elastischen und unelastischen Flieſsigen gesagt haben, erkennet man, daß die in einem Gefäße von allen Seiten eingeschlossene Luft so viel Gewalt anwendet, von innen hinaus zu drücken; als die umgebende Luft brauchet, von außen hinein zu drücken: und dieses macht, daß ein Körper dem beträchtlichen Drucke, den er (633) auszustehen hat, nicht weicher.

637. Wenn eine solche Röhre, als wir (633) Fig. 248) beschrieben haben, an ein in Grade getheiltes Bret angemacht wird, wo diese Abtheilungen von der Horizontalline oder Oberfläche des Queckſilbers in dem Gefäße anfangen; so heißet sie **Barometer**: weil sie dienet, durch die Höhe des Queckſilbers in der Röhre AB, von dem Drucke, welchen die Luft auf die Körper machet, zu urtheilen.

Man sieht also nun, warum dieses Instrument dieselbe Höhe, in dem verschlossenen, wie in dem freyen Orte anzeiget. Dieß geschieht darum: weil die eingeschlossene Luft, denselben Druck auf das in dem Gefäße enthaltene Queckſilber, durch ihre Federkraft, als frey durch ihr Gewicht ausübet.

638. Das Queckſilber erhält ſich an demſelben Orte nicht beſtändig auf einer Höhe. Zu Paris iſt es bald etwas über 27½ Zoll; bald etwas darunter: daher der von der Schwere oder Federkraft der Luft verurſachte Druck ſich bald vermehren, bald vermindern muß. Da die Federkraft der Luft ſich vermehren oder vermindern kann, ohne daß ſich ihr ganzes Gewicht vermehrt oder vermindert, wie durch die Wärme oder Kälte geſchehen kann: ſo kann man die Veränderungen des Queckſilbers in dem Barometer, den Veränderungen der Schwere der Luft allein, nicht zuſchreiben.

Dem ſey nun wir ihm wolle: da dieſe Veränderungen ankündigen, daß die Luft im Stande ſey, einer größern oder kleinern Queckſilberſäule, und folglich auch einer gröſſern oder kleinern Waſſerſäule, das Gleichgewicht zu halten; ſo muß man daraus ſchließen, die Größte Höhe, auf welche man das Waſſer mittelſt einer einzigen Pumpe heben könne, ſey nicht beſtändig von 32 Schuh; ſondern ſie verändere ſich nach der Höhe des Queckſilbers im Barometer.

639. Trägt man den Barometer von einem Orte in den andern, der höher, oder niedriger iſt: ſo fällt das Queckſilber in dem erſten Falle; und ſteiget in dem andern. Denn weil die Luftſäule, welche ſich in dem erſten Falle auf das Queckſilber in dem Gefäße ſtützet, kürzer, und in dem andern länger iſt; ſo muß ſie im erſten Falle leichter als im andern ſeyn; folglich im erſten Falle nur mit einer kleinern, nnd im andern mit einer größern Queckſilberſäule das Gleichgewicht haben. Alſo wird in dem erſten Falle etwas Queckſilber von der Röhre in das Gefäß fallen; und in dem andern, aus dem Gefäße in die Röhre ſteigen. Dieſes hat auch die Erfahrung beſtättiget. Aber man muß beobachten, daß dieſe Veränderungen nur bey der Veränderung der Höhe von etlichen Klaftern merklich ſeyen. Man kann ſo beynahe ſagen,

daß

daß bey dem Unterschiede der Höhe von 12 Klaftern, der Unterschied der Höhe im Barometer 1 Line sey.

Die größten Höhen, auf welche man das Wasser durch ein Saugwerk heben kann, verändern sich also nach den Höhen der Oerter, wo sich dieses befindet; und sind den dasigen Höhen des Barometers proportional.

640. Wir haben gesagt, die Luft werde beynahe nach dem Verhältnisse der Gewichter zusammengedrücket. Obschon die Erfahrung, wodurch wir es gewiesen haben, dieß Verhältniß genau genug giebt: so muß man doch nicht schließen, daß es das nämliche sey, das Gewicht, womit die Luft gedrückt wird, mag seyn, wie da will. Es ist nicht wahrscheinlich, daß man was immer für eine Masse Luft dahin bringen könne, damit sie einen unendlich kleinen Raum einnehme, indem man sie immer fort beschwert; oder damit sie einen unendlich großen Raum einnehme, indem man den Druck immerfort vermindert. Diese äuserste Zusammendrücklichkeit, und diese äuserste Ausdehnbarkeit ist nicht in der Natur. Nichts destoweniger kann man, wenn nur von mittelmäßigen Höhen die Rede ist, voraussetzen, daß die Luft bey verschiedenen Höhen, nach dem Verhältniß der Gewichter, womit sie beschwert ist, zusammengedrücket werde. Dadurch kann man beynahe bestimmen, auf welcher Höhe das Queckfilber im Barometer, kraft der Schwere der Luft bey verschiedenen Höhen der Oerter, stehen müsse.

In der That, wir haben oben (631) gesehen, daß, wenn D die eigenthümliche Schwere oder Dichte bey was immer für einer Höhe ist, der Druck, welchen die Luft litte, oder verursachen könnte, $\int Ddx$ wäre. Nennet man also an diesem Orte des Barometers Höhe h; und stellet durch 1 des Queckfilbers Dichte vor:

so hat man ſDdx = h; oder vielmehr ſ—Ddx=h; weil sich bey zunehmender Höhe x, h vermindert.

Andererseits, da die Luft so viel dichter ist, als sie mehr gedrücket wird: so vermehret sich ihre Dichte oder eigenthümliche Schwere, wie das Gewicht, wovon sie gedrücket wird; folglich hat man, wenn des Barometers Höhe bey der Oberfläche des Meeres H, und die dasige specifische Schwere der Luft p genannt wird, $H : h = p : D$; daher $h = \frac{DH}{p}$; und $ſ — Ddx = \frac{HD}{p}$. Differenzieren wir diese Gleichung, bey der p und H beständige Größen sind; so haben wir $— Ddx = \frac{HdD}{p}$. Daraus zieht man $\frac{dD}{D} = \frac{—pdx}{H}$; und $lD = \frac{—px}{H} + lC$. Aber am Meere, wann nämlich $x = o$ ist, muß $D = p$; folglich $lp = lC$; und $C = p$ seyn. Daher $lD = \frac{—px}{H} + lp$; mithin $lD — lp = \frac{—px}{H}$; oder $l\frac{D}{p} = \frac{—px}{H}$; endlich $\frac{D}{p} = e^{\frac{—px}{H}}$ wo e die Zahl ist, deren Logarithmus 1 ist; und $D = pe^{\frac{—px'}{H}}$ Nimmt man die erste Gleichung $ſ—Ddx = h$ wieder her; und setzet für D seinen Werth; so hat man $h = ſ — pe^{\frac{—px}{H}} dx = He^{\frac{—px}{H}}$; oder

$lh = lH — \frac{px}{H}$. Dieß giebt die Höhe h des Barometers,

meters, bey der Höhe x über dem Meere, wenn man seine Höhe H bey dem Meere, und die eigenthümliche Schwere der Luft p bey demselben Horizonte kennet.

Um diesen Ausdruck noch bequemer zu machen: so kann man $\frac{px}{H}$ als einen Logarithmen einer gewissen Zahl A ansehen; und setzen $\frac{px}{H} = lA$; so hat man $lh = lH - lA = l\frac{H}{A}$.

Aber man muß wohl beobachten, daß in der Gleichung $\frac{px}{H} = lA$, nachdem man durch die Werthe von p, x und H den von $\frac{px}{H}$ folglich lA wird bestimmet haben, dieser Logarithmus ein hyperbolischer ist; foglich, um die Zahl A mittelst der gewöhnlichen logarithmischen Tafeln zu finden, mit der Zahl 0,434294 48 ꝛc. multipliciret werden muß.

Was die Gleichung $lh = l\frac{H}{A}$ betrifft, kann man die Logarithmen, ob sie schon hyperbolische sind, als gewöhnliche ansehen: denn, wenn zwey Zahlen gleiche Logarithmen in einem Systeme haben; so haben sie sie auch in jedem andern Systeme, das ihnen gemein ist.

Um von dem, was wir gesagt haben, einige Anwendung zu machen: so wollen wir die Höhe des Barometers auf dem Gipfel des Berges Pik der Insel Teneriffa finden, nämlich die, welche aus der vorhergehenden Rechnung entsteht, mit der, die man beobachtet hat, vergleichen.

Die Höhe dieses Berges ist von 13158 Pariserschuh, oder 157896 Zoll über des Meeres Oberfläche gefunden worden. Beym Meere hielt sich das Queckfil-

ber auf sieben und zwanzig Zoll fünf Linen Höhe; das ist, die Erfahrung gab h = 17 Zoll 5 Linen. Seyen wir was die Rechnung giebt.

Die eigenthümliche Schwere der Luft ist beynahe der 850ste Theil der Schwere des gemeinen Wassers; und die vom Wasser beynahe der 14te Theil der Schwere des Queckſilbers. Man hat also

$$p = \frac{1}{850 \times 14} = \frac{1}{11900}$$

$$x = 157896 \text{ Zoll}$$

$$H = 27\frac{5}{8} \text{ Zoll}$$

Daher $\frac{px}{H} = \frac{157896}{11900 \times 27\frac{5}{8}} = 0{,}4767153$. Dieß ist ein hyperbolischer Logarithmus von dem, was wir A geheißen. Multipliciren wir also mit 0,4342945; so haben wir 0,20703346 für den gemeinen Logarithmen von A. Daher $l\frac{H}{A} = 1{,}2375306 = lh$. Dieser kommt in den gewöhnlichen Tafeln der Zahl 17,28 zu. Also ist h = 17,28 Zoll = 17 Zoll. $3\frac{1}{3}$ Lin. Da nun die Beobachtung 17 Zoll 5 Lin. gegeben: so ist der Unterschied zwischen der Rechnung und der Beobachtung $1\frac{2}{3}$ Line.

Uebrigens können wir nicht verhelen, daß man diese Bestimmung der Höhe des Barometers, besonders bey groſsen Höhen, nicht als genau ansehen muß. Denn 1) haben wir schon beobachtet, daß sich die Luft nicht bey jeder Weite, den Gewichtern proportionirt zusammendrücken lasse. 2) Vermindert sich die Schwere bey etwas beträchtlichen Weiten. 3) Ist die eigenthümliche Schwere der Luft p sehr veränderlich. 4) Können die

Ver-

Veränderungen in den Barometershöhen, zum Theile von der Federskraft der durch die Wärme ausgedehnten, verdünnerten, oder von der Kälte zusammengezogenen, verdickerten Luft herrühren; derer Wirkung man also kennen müßte. 5) Können die Dünste und andere fremde in der Luft schwebende Körper in dieser Bestimmung vieles ändern.

641. Eine andere Anwendung dieser Grundsätze die wir noch machen können, und die mit zu unserm Gegenstande gehört, da sie dient einen Begriff des Widerstandes zu geben, welchen die Luft der Bewegung geworfener Körper entgegensetzet, wie wir noch sehen werden, ist: die Dichte der Luft bey verschiedenen Höhen zu bestimmen.

Wir haben oben $\frac{D}{p} = e^{\frac{-px}{H}}$ für den Ausdruck dieser Dichte gefunden, wo H des Queckſilbers Höhe im Barometer an des Meeres Oberfläche ist, wo x anfängt.

Es sey a die Höhe, auf welche sich die Atmosphäre erhöbe, wenn ihre Schwere und Dichte stets einerley bliebe, so wie sie da ist, wo man den Anfang von x rechnet. So hätte man $1 \times H = pa$, wo 1 die eigenthümliche Schwere des Queckſilbers bedeutet. Setzet man für H seinen Werth; so hat man $\frac{D}{p} = e^{\frac{-x}{a}}$; folglich $D = pe^{\frac{-x}{a}}$.

Was die Größe a betrifft; so hängt sie von dem Verhältniß der eigenthümlichen Schwere der Luft zu der vom Wasser, an dem Orte, wovon die Rede ist, ab.

z. B. wenn die eigenthümliche Schwere der Luft zu der vom Wasser 1 zu 850 ist; wie dieß bey mittlerer Witterung, und bey wenig beträchtlichen Höhen über dem Meere statt findet: so ist die Luft im Stande, durch ihre mittlere Schwere, einer Wassersäule, die 32 Schuh hoch ist, das Gleichgewicht zu halten; wo die Höhe $a = 850 \times 32 = 27200$ Schuh wäre.

Fragt man also, was bey diesen Voraussetzungen, für eine Dichte der Luft auf der Höhe von 1000 Schuh $\frac{-1000}{27200}$ $\frac{-10}{272}$; wäre: so hat man $D = pe^{27200} = pe^{272}$; oder $\frac{D}{p} = e^{\frac{-10}{272}}$; folglich $\log \frac{D}{p} = \frac{-10}{272}$. Man muß muß also die Zahl kennen, derer hyperbolischer Logarithmus $\frac{-10}{272}$ ist; oder die, derer gemeiner Logarithmus $\frac{-10}{272} \times 0{,}4342945$ ist; nämlich die Zahl, welche in den gewöhnlichen Tafeln dem Logarithmen $-0{,}0159593$ zukommt; die beynahe 0,964 ist. Also ist $\frac{D}{p} = 0{,}964$; mithin $D : p = 1 : 0{,}964 = 1000 : 964 = 250 : 241$; die Dichte nämlich bey der Höhe von 1000 Schuh beynahe um $\frac{1}{25}$ vermindert. Man wird eben so, bey der Höhe von 1000 Klaftern, der Luft Dichte beynahe um $\frac{21}{100}$, oder über $\frac{1}{5}$ vermindert finden.

642. Nach diesem, was wir eben über die Schwere und Federkraft der Luft, und über den Druck der Flieſsigen überhaupt gesagt haben, ist nun leicht zu verstehen, wie sich das Wasser in den Saugwerken hebe.

In einem Saugwerke sind vornämlich drey Stücke zu betrachten: die Röhren, die Ventile und die Kolben.

Der

Der **Kolben** ist ein Körper ABCD (Fig. 250 u. 252) mit einer zirkelförmigen Grundfläche, welcher den innern Raum der Röhre, welche der **Stiefel** heißet, den er genau ausfüllt, durchlaufen kann. Das **Ventil** E ist bestimmt, den Durchgang des Wassers wechselweise zu zulassen und zu verschließen. Der Stiefel ist die Röhre, welche der Kolben durchläuft. FGHK ist eine andere mit dem Stiefel verbundene Röhre, die **Saugröhre** genannt, die mit ihrem andern Ende ins Wasser reichet, dessen Oberfläche RS sey.

Setzet man, daß eine Kraft P (Fig. 250) an die Kolben- (Pulmp- oder Zieh-) stange angewandt wird; und sie den Kolben in die Höhe hebt: so wird die in dem Raume DVKHGFC eingeschlossene Luft, durch ihre Federkraft trachten, den von dem Kolben frey gelassenen Raum einzunehmen; und das Ventil heben, um in den Stiefel zu treten. Ihre Federkraft wird sich aber vermindern; nach dem Maße, als sie sich ausdehnet. Sie wird also auf des Wassers Oberfläche GH eine kleinere Gewalt ausüben, als die natürliche Luft auf die umgebenden Theile RG, HS, ausübet. Der Ueberschuß des Druckes von Seiten der äusern Luft wird also das Wasser in der Röhre GK auf eine gewisse Höhe HN steigen machen, bis daß das Gewicht dieser Säule mit der Federkraft der übrigen Luft, dem Gewichte der äusern Luft gleich ist. Alsdann schließt sich das Ventil E von sich selbst. Drücket man nun den Kolben hinab: so wird die zwischen dem Kolben und des Stiefels Grundfläche TV enthaltene Luft die Federkraft nach dem Maße vermehren, als der Kolben hinabsteiget. Diese wird eine Gewalt gegen des Kolbens Grundfläche ausüben, und entwischen: wenn ihre Federkraft größer geworden, als die von der äusern Luft; und der Kolben zugleich durchlöchert, und mit einer das Loch bedeckenden Klappe versehen ist, die sich wie das Ventil öffnen und schließen kann.

Ist diese Luft einmal hinausgegangen; so fällt die Klappe L zurück: und fängt man aufs neue an, den Kolben zu heben; so hebt sich das Wasser in FGHK, aus dem vorigen Grunde, auf eine gröſsere Höhe; so daſs es nach einer gewissen Zahl Züge, den Stiefel oder des Kolbens Spielraum erreichet. Ist es einmal in diesen getreten; so geht es bey jedesmaliger Absteigung des Kolbens, durch das Loch, welches in ihm ist; und hebt die Klappe: die sich hernach durch ihre Schwere selbst schlieſset; und das durchgegangene Wasser oben erhält: welches hernach mit dem Kolben gehoben wird. So ist das Spiel der Pumpe oder des Saugwerkes beschaffen.

Was die **verkehrte Pumpe** oder das **Druckwerk** betrifft; so geschieht seine Wirkung also: Wann man den Kolben PCD (Fig. 251), welcher sich unter des Wassers Oberfläche RS befindet, hinabsteigen läſst: so entsteht zwischen dem damals geschlossenen Ventile E und des Kolbens Grundfläche ein leerer Raum. Das Gewicht des Wassers und das von der äusern Luft wirken alsdann zusammen gegen die Klappe L, und treiben das Wasser in den Spielraum der Pumpe. Nachdem das Wasser aufhört hinein zu gehn; so schlieſst sich die Klappe L. Hebt man sodann den Kolben; so treibt dieser das hineingegangene Wasser vor sich fort: welches das Ventil E hebt, und in die Steigröhre TVYX hinein geht. Nachdem der Kolben gehoben worden: so schlieſst sich das Ventil E, und erhält das Wasser oben; bis mittelst einer neuen ähnlichen Verrichtung frisches Wasser durchgeht: welches sich nach Verhältniſs der Kolbenstöſse hebt. Bisweilen wird der Kolben über des Wassers Oberfläche gesetzet: aber bey jeder Stellung läſst es sich auf eine ähnliche Art erklären. So ist das Spiel der verkehrten Pumpe, oder eines Druckwerkes.

Das **Saug- und Druckwerk** wird also genennet; weil es die Wirkung von beiden vereiniget. Der Kolben

ABCD

ABCD (Fig. 252) macht durch sein Heben, daß das Wasser durch die Röhre FGHK in den Raum CDTVO geht, wie beym Saugwerke. Steigt er hernach hinab; so drückt er das in diesem Raume enthaltene Wasser: welches durch das Ventil E, das sich selbst schließt, nicht wieder zurück gehen kann; folglich das Ventil L hebt, und in die Röhre MOmn steigt. Man kann die Zurichtung und Anordnung der Theile der Pumpen auf vielerley Art verändern: aber ihre Wirkungen werden sich nach dem, was vorgetragen worden, leicht erklären lassen.

643. Nun wollen wir die Haupteigenschaften dieser Maschinen betrachten.

Mittelst des Druckwerkes kann man das Wasser so hoch heben, als man will; wenn man nur hinlängliche Kraft anwendet. Aber die Schätzung dieser Kraft erfodert mehr als eine Betrachtung. Man muß auf die Maße des Kolbens und der Röhren; auf die Höhe, auf welche man das Wasser heben will; und auf die Geschwindigkeit, mit welcher man es heben will, acht haben.

Es ist gewiß, daß die erfoderliche Kraft, das Wasser auf eine gegebene Höhe zu heben, wenigstens fähig seyn muß, dem Drucke, welchen des Kolbens Grundfläche auszuhalten hat, wann das Wasser die gegebene Höhe erreichet, das Gleichgewicht zu halten. Diesen Druck wollen wir entwickeln.

Ueberhaupt muß die Kraft wenigstens im Stande seyn, das Gewicht einer Wassersäule zu tragen, welche zur Grundfläche die vom Kolben, und zur Höhe die Weite der untern Oberfläche des Wassers RS (Fig. 251) von der obern XY in der Röhre hat.

Wirklich, wann des Kolbens Grundfläche DC sich unter der untern Horizontalfläche des Wassers RS befindet; so ist augenscheinlich, daß die Kraft den Druck des Wassers, welches zwischen RS und DC enthalten ist, nicht tragen dürfe: weil dieser Druck durch den vom umgebenden Wasser, welches durch die untere Oeffnung des Stiefels dringet, im Gleichgewichte gehalten wird. Die Kraft hat also nur den Druck, welchen das Flieſsige zwischen RS und XY auf die Oberfläche DC machet, auszuhalten. Nun muß dieser Druck durch den von einem Faden Wasser, welcher zur Höhe die Weite von RS bis XY hätte, so vielmal wiederholt, als Punkte in DC sind, geschätzet werden: also ist er dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche zur Grundfläche DC, und zur Höhe die von XY über der untern Horizontalfläche des Wassers RS hätte.

Ist der Kolben über dem Horizonte R'S': so ist offenbar, daß das zwischen DC und R'S' enthaltene Wasser, den Kolben nicht beschwere. Da es aber alsdann nicht anders als durch den Druck, welchen die äusere Luft auf die Oberfläche des umgebenden Wassers machet, erhalten werden kann: so ist dieser Druck der Luft nicht mehr im Stande, dem, welcher auf die Oberfläche XY geschieht, das Gleichgewicht zu halten. Folglich ist des Kolbens Oberfläche DC mit einem Gewichte beschweret, welches dem von einer Wassersäule gleich ist, die zur Grundfläche DC und zur Höhe die Weite zwischen DC und R'S' hat. Dieser Druck zu demjenigen hinzugesetzt, welchen das zwischen DC und XY enthaltene Wasser auf DC machet, und der zum Werthe das Gewicht einer Wassersäule hat, derer Grundfläche DC, und Höhe die Weite zwischen DC und XY ist, machet immer ein Gewicht einer Wassersäule aus, welche DC zur Grundfläche, und die Höhe von XY über dem Horizonte des Wassers R'S' zur Höhe hat.

644. Was das Saugwerk betrifft, so ist nicht genug, um von seiner Wirkung zu urtheilen, die Kraft zu entwickeln: sondern man muß auch vor allem untersuchen, ob das Wasser bis zum Kolben kommen, und gar darüber steigen könne. Denn es giebt Umstände, wo das Wasser auf einer gewissen Höhe stehen bleiben kann: man mag so viel Züge thun als man will.

Um dieses zu begreifen, bilden wir uns ein, das Wasser sey schon in I (Fig. 250) gekommen; und des Kolbens wirkliche Lage sey die niedrigste, die er haben kann; und um der Leichtigkeit willen, setzen wir, die Röhre sey durchaus von gleicher Dicke. Es ist klar, daß die in dem Raume CDIZ enthaltene Luft, dieselbe Kraft und dieselbe Elasticität habe, als die äusere Luft (wenigstens, wenn man des Ventils L Schwere und seine Reibung beyseite setzt). Denn wenn sie mehr Kraft hätte; so höbe sie dieses Ventil, und entwischete. Stellen wir uns nun vor, des Kolbens Spielraum, oder die Ausdehnung, welche er bey jedem Hube durchläuft sey DO. Kommt so dann die Grundfläche CD in QO an: so dehnt sich die Luft, welche den Raum CDIZ einnahm, in den Raum QOIZ aus; weil das Wasser, nach der Voraussetzung, nicht höher steigt. Also wird ihre Federkraft kleiner als die von der natürlichen Luft seyn, und sich zu dieser, wie CDIZ zu QOIZ, oder wie DI zu OI verhalten. Machet also diese Federkraft mit dem Gewichte der Wassersäule, welche zur Höhe die Weite zwischen ZI und RS hat, ein Gewicht aus, das dem von einer Wassersäule von 32 Schuh gleich ist, welches die Gewalt ist, welche die äusere Luft auf des Wassers Oberfläche in RS ausübet: so ist das Gleichgewicht; und so kann das Wasser nicht höher steigen. Ist dieses Gewicht größer, als das von 32 Schuh Wasser; so fällt das Wasser eher zurück, als sich das Ventil E schließt: ist es aber kleiner; so fährt das Wasser fort zu steigen.

Nun wollen wir sehen, wie dieses Gewicht zu bestimmen.

Nennen wir die Höhe des Punktes O über des Wassers Horizonte RS, das ist, des Kolbens gröſste Höhe über dem untern Wasser auser der Röhre, h; seinen Spielraum DO, i; die Weite OI, das ist, des Kolbens gröſste Höhe über dem obern Wasser in der Röhre, x: so ist seine kleinste Höhe über diesem letzten DI $=$ x — i; und des Punktes I Höhe über dem untern Wasser h — x.

Weil die in dem Raume CDIZ eingeschlossene Luft zwischen dem Wasser und dem Kolben, da er am niedrigsten ist, dieselbe Federkraft, als die äusere Luft hat: so kann ihre Kraft durch eine 32 Schuh hohe Wassersäule gemessen werden. Weil nun die Kraft der in dem Raume QOIZ ausgebreiteten Luft, zwischen dem Wasser und dem Kolben, da er am höchsten ist, kleiner seyn, und sich zu der von der natürlichen Luft, wie DI zu OI, verhalten muſs; so wird sie das vierte Glied folgender Proportion seyn: $x : x - i = 32 : \frac{32(x-i)}{x}$.

Aber die Kraft, welche das zwischen ZI und RS enthaltene Wasser gegen den Druck der äusern Luft ausübet, wird durch die Höhe h — x gemessen. Also macht die Federkraft der in dem Raume QOIZ ausgebreiteten Luft, zwischen dem Wasser und dem Kolben, da er am höchsten ist, mit dem Gewichte oder Drucke des in der Röhre zwischen IZ und RS enthaltenen Wassers, zusammen ein Gewicht aus, welches $= \frac{32(x-i)}{x} + h - x$ ist.

Damit nun das Wasser stets steigen könne: so muſs dieses Gewicht kleiner als das von einer 32 Schuh hohen Wassersäule seyn. Nennet man diesen Theil, um den

es

es kleiner ist, y; so hat man $\frac{32(x-i)}{x} + h - x = 32 - y$. Daraus zieht man $-32i + hx - xx = -xy$; folglich $x = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}y \mp \sqrt{(\frac{(h+y)^2}{2} - 32i)}$.

Damit das Wasser stehen bleibe: so muß $y = o$ seyn, wie klar ist. Da alsdann $x = \frac{1}{2}h \mp \sqrt{(\frac{1}{4}hh - 32i)}$, davon zwey wahre Werthe sind, wenn $\frac{1}{4}hh$ gröſser als $32i$ ist; so kann man sagen:

**Wenn das Quadrat der Hälfte von der gröſsten Höhe der Grundfläche des Kolbens über der untern Horizontalfläche des Wassers, gröſser als der 32 mal genommene Spielraum des Kolbens ist: so giebt es allezeit zwey Punkte in dem Saugwerke, bey denen das Wasser stehen bleiben kann;** so daß das Saugwerk für schlecht zu halten, wenn der Kolben, da er am niedrigsten ist, sich zwischen diesen zweyen Punkten befindet.

Ist aber $32i$ gröſser als $\frac{1}{4}hh$: so werden die zwey Werthe von x, die man hat, da $y = o$ gesetzet wird, eingebildete Werthe. Dieß zeiget an, daß bey einem nach dieser Bedingung gebauten Saugwerke, y unmöglich $= o$ seyn könne. Also wird der Druck der äusern Luft allezeit stärker seyn; und das Wasser nicht stehen bleiben. **Damit also das Saugwerk seine Wirkung unfehlbar mache: so muß das Quadrat der Hälfte von der gröſsten Höhe des Kolbens über der untern Horizontalfläche des Wassers, kleiner als der 32 mal genommene Spielraum des Kolbens seyn.**

Zieht man aus der oben gefundenen Gleichung — 32 i + hx — xx = — xy den Werth von y; so hat man

$$y = \frac{xx - hx + 32i}{x} = x - h + \frac{32i}{x}.$$

Stellen wir uns nun vor, daß AB (Fig. 253 u. 254) des Kolbens größte Höhe über der untern Horizontalfläche des Wassers, und AD seinen Spielraum bedeute; und daß die verschiedenen Theile AP der Line AB, nach und nach die Werthe von x geben; und daß die hieraus entstandenen Werthe von y, auf die Senkrechten PM aufgetragen seyen: so hat man eine krumme Line MMC, welche (Fig. 253) so lang als $\frac{1}{4}$hh größer als 32 i ist, die Gerade AB in zweyen Punkten I, I′ schneidet; so daß auf beiden Seiten dieser Geraden AB′, Ordinaten PM seyen, von denen die zur Rechten die positiven, und die zur Linken die negativen Werthe von y bedeuten.

Man sieht also, daß so lang als $\frac{1}{4}$hh größer als 32 i ist, der Druck der äusern Luft allezeit stärker sey, bis das Wasser die Höhe BI′ erreichet. Bey diesem Punkte wird es stehen bleiben, wenn man seine erlangte Bewegung bey Seite setzet; indem der Werth von y = o ist. Geht aber des Wasser mittelst seiner erlangten Bewegung über die Höhe BI′ hinaus, bis zu einem Punkte zwischen I und I′: so kann es da nicht stehen bleiben; sondern es wird abwärts steigen, wenn es das Ventil nicht hindert; weil der negative Werth von y anzeiget, daß der Druck der äusern Luft schwächer als die vereinigten Kräfte des Wässers und der innern Luft sind. Erreicht das Wasser die Höhe des Punkts I; so kann es da, aus derselben Ursache, wie vorher stehen bleiben. Geht es aber einmal über den Punkt I hinaus: so ist nicht mehr zu fürchten, daß es herabsteigen werde; weil die positiven Ordinaten PM zwischen A und I alle anzei-

zeigen, daſs der Druck der äusern Luft allezeit, von der Höhe I bis zu A, der stärkste sey.

Ist hingegen der Werth von $\frac{1}{4}$hh kleiner als 32 i (Fig. 254), so schneidet die Krumme die Axe AB nicht; alle Ordinaten PM sind positiv; und der Druck der äusern Luft ist allezeit der stärkste. Also ist kein Stillstehen des Wassers zu fürchten. Dieſs bestätiget und erläutert das, was wir oben gesagt haben.

645. Errichtete man das Druckwerk an einem Orte, welcher von dem, wo das Wasser von dem Drucke der Luft auf einer Höhe von 32 Schuh erhalten wird, merklich unterschieden wäre: so müſste man statt 32 die Höhe setzen, die das Wasser an dem Orte, nach der Beobachtung, durch den Druck der Luft erreichen kann. Die Beobachtung kann durch den Barometer geschehen, woran ein Line über oder unter $27\frac{1}{2}$ Zoll, für 14 Linen bey der Wassersäule von 32 Schuh gilt. Man addirt nämlich zu 32 Schuh soviel mal 14 Linen, als das Queckſilber über $27\frac{1}{2}$ Zoll steht; und zieht sie davon ab, wenn dieſes darunter steht.

In der vorhergehenden Rechnung haben wir die Pumpe betrachtet, als wenn sie gleich dick wäre. Wenn sie es nicht ist, wie in der 250 Fig. so ist die Rechnung doch nicht schwerer. Um die Kraft der innern Luft zu berechnen, wann man setzet, das Wasser sey noch nicht in dem Stiefel XV; sondern z. B. in MN: so muſs man diese Proportion machen, der Raum QOVNMTQ: CDVNMTC = 32 Sch. zur vierten Proportionale: welche zu der Wassersäule, deren Höhe NH ist, hinzugesetzt, = 32 — y seyn muſs, wie oben. Nochmehr, hat die Saugröhre einen kleinern Durchmesser als der Spielraum; und die oben erfoderten Bedingungen haben statt; so kann es der Wasserpumpe an ihrer Wirkung

nicht mangeln: denn die Luft breitet sich in dieser noch leichter aus, als wenn sie durchaus gleichdick wäre.

646. Was die Gewalt betrifft, welche die Kraft anwenden muſs, um das Wasser auf eine bestimmte Höhe XY (Fig. 250) zu erhalten: so wird sie, wie wir bey dem Druckwerke gesehen, durch das Gewicht einer Wassersäule gemessen, die zur Grundfläche des Kolbens seine DC, und zur Höhe die von XY über der Horizontalfläche RS hat (wir setzen die Reibung und das Gewicht des Kolbens bey Seite). Dieses läſst sich auf eine ähnliche Weise darthun, wie wir beym Druckwerke, da der Kolben über des Wassers Horizontalfläche R'S' (Fig. 251) war, dargethan haben.

Was die Bewegung des Wassers in den Druck- und Saugwerken, und auch ihre verschiedene Geschwindigkeit in den ungleich weiten Röhren, dem Stiefel, den Saug- und Steigröhren, und der Ventile Oeffnungen, für einen Unterschied in der Gewalt der Kraft erfodert, kann hier noch nicht erkläret werden: weil wir noch nicht von des Wassers Bewegung gehandelt haben. An einem andern Orte werden wir die Untersuchung darüber anstellen; vorher aber noch einige Begebenheiten betrachten, die sich durch die Federkraft und durch den Druck des Flieſsigen erklären lassen.

647. Wenn man in ein Gefäſs worin Wasser oder ein anderes Flieſsige ist, man den kürzesten Schenkel einer krummen Röhre DEF (Fig. 255), die man **Heber** nennet, eintauchet, und man an dem andern Ende, die in dem Heber enthaltene Luft aussauget: so wird das Wasser steigen und bey der untern Oeffnung F auslaufen; so lang die obere Oeffnung D im Wasser ist.

Die Ursache dieser Begebenheit ist, weil, wann man die in DEF enthaltene Luft herausgelassen, der Druck der äu-

äusern Luft auf die Oberfläche AB des Flieſsigen machet: daſs selbes in den Heber steigen, und durch den längern Schenkel BF auslaufen muſs. Obschon hernach, wann der Auslauf schon angefangen, die Luft gegen die untere Oeffnung F eben so stark als auf die Oberfläche des Flieſsigen in dem Gefäſse drücket: so wird doch das Blätchen F noch von der ganzen Wassersäule IF gedrücket. Es muſs also samt der Wassersäule fallen. Aber durch ihr Fallen läſst sie in I einen leeren Raum hinter sich: welcher daher durch den beständigen Druck der Luft auf die Oberfläche des Wassers im Gefäſse, mit Wasser stets wieder angefüllet wird.

Man sieht aus diesen Schlüssen, daſs wärendem Ausflusse die Luft nur mit einer Kraft wirke, welche der Schwere einer Wassersäule von der Höhe IF, die zwischen der Oberfläche AB des Wassers im Gefäſse und dem Horizonte der untern Oeffnung F enthalten, gleich ist; so daſs der Ausfluſs desto schneller seyn wird, je gröſser diese Höhe IF, und folglich der Unterschied der Schenkel vom Heber ist; und gar kein Ausfluſs, wenn diese Höhe null, die Oeffnung F im Horizonte der Oberfläche des Wassers im Gefäſse ist; und der Ausfluſs wird rückwärts geschehen, ins Gefäſs, wenn die Oeffnung F über diesen Horizont erhoben wird. Man sagt insgemein, der äusere Schenkel EF müsse länger als der andere ED im Wasser seyn. Aber man sieht, daſs durch diesen Ausdruck angezeiget wird, die vertikale Höhe von E über F müsse gröſser seyn, als die von E über D: wozu diese Länge just nicht nöthig.

Man könnte DE viel länger als EF machen, indem man ihm verschiedene Krümmung gäbe. Das Wasser würde so lang flieſsen, als D höher als F wäre; im Falle E über D nicht über 32 Schuh erhaben ist.

648. Wann man die Lippen an die Oeffnung einer Flasche anlegt, und den darin enthaltenen Saft aussaugt; so legen sich die Lippen fest an den Rand der Oeffnung an: und man hat so viel mehr Mühe sie los zu machen; als man stärker gesaugt hat.

Dieses kommt daher: weil man, durch Aussaugung eines Theils der in der Flasche enthaltenen Luft, nach Verhältniß ihrer Verminderung, die Federkraft der noch übrigen Luft schwächet; so kann sie dem Drucke der äusern Luft, keinen gleichen Druck entgegen setzen. Dieser Unterschied kann so weit gehen; daß die Flasche gar zusammen bricht; besonders, wenn sie eben ist.

649. Auf eine ähnliche Weise erkläret man, warum man Mühe habe, einen Blasbalg aufzuziehen, wann seine Oeffnung verstopfet ist. Dieses kömmt daher: weil, wann man die Balgbreter von einander zieht, die innere Luft sich in einen gröſsern Raum ausdehnet, und daher eine Verminderung ihrer Federkraft leidet; folglich weniger gegen die äusere Luft, als diese gegen sie drücket. Viel mehrere Begebenheiten lassen sich also erklären, wie wir noch anderwärts sehen werden.

650. Noch etwas ähnliches mit dem Drucke der Flieſsigen, den Druck der aufgehäuften Erde, und den Widerstand, den man ihr zu setzen hat, besonders bey den Wällen der Festung, wollen wir untersuchen.

Setzen wir mit Herrn **Couplet** (Mem. de l'Acad. de Paris 1706 pag 107) die Erde ABC (Fig. 256) bewege sich auf CA, wie auf einer schiefen Ebene, die mit der Horizontalline AD, was immer für einen Winkel CAD mache, herab, oder trachte wenigstens sich darauf herab zu bewegen, und Drucke gegen die Futtermauer AB: so kann man die Schwere dieser drückenden

den Erde durch den Inhalt des Dreyeckes ABC, nämlich durch $\frac{AB \times BC}{2}$ vorstellen; und den Druck D gegen die Futtermauer durch diese Proportion $D : \frac{AB \times BC}{2} = AB : BC$, nämlich $D = \frac{AB^2}{2}$ finden; das ist:

**Es verhält sich der horizontale Druck der Erde, wie ihre Höhe; oder, er ist fast so beschaffen, wie der Druck der flieſsigen Körper.**

Es ist also kein Zweifel, daſs, wenn gesagte Bewegung oder Bestrebung der Erde, nicht durch ihre Klebrigkeit und Rauhigkeit, gehindert würde, ihr horizontaler Druck fast so, wie der Flieſsigen ihre berechnet werden könnte. So aber vermindert sich ihr Druck durch ihren Zusammenhang und Festigkeit: und er vermehrt sich, wenn sie (die Erde) hievon abweichet, und, vom Wasser durchdrungen, sich einem flieſsigen Wesen nähert.

Ich will den Druck des Flieſsigen gegen eine vertikale Fläche als die Einheit, und den Druck der Erde dargegen, als einen n Theil dieser Einheit betrachten. Da nun der Druck des Flieſsigen gegen eine Vertikalfläche, deren Höhe a und Grundline b ist, durch $\frac{aab}{2}$ ausgedrücket wird, das ist, der Schwere des Flieſsigen von diesem Inhalte $\frac{a^2b}{2}$ gleich ist, wenn des Flieſsigen Höhe eben so groſs, $= a$ ist; und durch $ab\left(\frac{a}{2}+h\right)$ vorgestellet wird, wenn des Flieſsigen Höhe um h gröſser, als der Fläche ihre a ist: so ist der Erde Druck gegen sol-

che Fläche im ersten Falle durch $\frac{na^2b}{2}$, und im zweyten durch $nab\left(\frac{a}{2}+h\right)$ vorzustellen. Der letzte Ausdruck ist allgemein: indem daraus der erste wird, wenn $h = o$ ist.

Nachdem wir den horizontalen Druck der Erde vorstellig gemacht: so wollen wir auch sehen, was ihm, mittelst einer Mauer, im Stande des Gleichgewichtes, für Widerstand zu leisten. Betrachten wir zu diesem Ende, die 256 Fig. Das Viereck ABGD stelle im Durchschnitte, einen Wall, eine aufgeworfene Erde vor; und das Trapez ABEG die daran aufgeführte Mauer, die Futtermauer des Walles, die seinem Drucke das Gleichgewicht halten soll. Hier ist die Erde mit der Mauer, der Fläche, die gedrückt wird, gleich hoch, $a = AB$; und die Breite auch überall gleich $b = 1$. Folglich ist hier der Erde Druck $\frac{na^2b}{2} = \frac{na^2}{2}$. Dieß kann man, wie bey den Flieſsigen bey einem Drittel der Höhe, in H, beysammen gedenken; so daß $AH = \frac{AB}{3} = \frac{a}{3}$. Stellen wir uns nun die Maur ABEG als einen aus gut miteinander verbundenen Steinen bestehenden, festen Körper vor: so kann sie durch den Druck der Erde nicht anders umgeworfen werden, als sie bewege sich um die äuserste Kante G, als um den Ruh- oder Bewegungspunkt, so daß die Abdachungsline GE den Bogen EM beschreibt. Mithin kann man sich die ganze Mauer selbst, oder die einzubildende Line GH, als einen Hebel vorstellen; daran der Ruhpunkt in G; der Druck der Erde, als die Kraft in H, nach der horizontalen Richtung HK, und ihre Entfernung vom Ruhpunkte $GK = \frac{a}{3}$; und die

Last

Last, das Gewicht oder die eigene Schwere der Mauer ist, die in zwey Theile zu theilen: davon der eine die Schwere der Abdachungsmauer GEF ist, die in L zu betrachten, so daß ihre Entfernung vom Ruhpunkte GL $= \frac{2GF}{3} = \frac{2}{3}$ d, wenn GF = d gesetzet wird, und der andere die Schwere der geradstehenden Mauer ABEF ist, die in der Mitte N ihrer unbekannten Dicke AF = y zu betrachten, so daß ihre Entfernung vom Ruhpunkte $GN = GF + FN = d + \frac{y}{2}$ ist.

Gleichwie nun die Kraft, der Druck der Erde durch ihren körperlichen Inhalt $\frac{na^2}{2}$ vorgestellet worden: so muß auch die Last, der Mauer Gewicht durch ihren körperlichen Inhalt vorgestellet werden; jedoch so, daß jeder mit der eigenthümlichen Schwere des Körpers, den er vorstellet, noch multipliciret werde. Der Inhalt der geraden Mauer ABEF ist demnach ay; und der Abdachung oder schiefen Mauer $FEG = \frac{ad}{2}$. Setzet man nun das Gewicht der Mauer von einem Kubikschuh, oder ihre eigenthümlich Schwere = 1; und die von der Erde = p: so ist der Last Theil in L, $= \frac{ad}{2}$; der in N, = ay; und die Kraft in H, $= \frac{pna^2}{2}$. Nun muß im Stande des Gleichgewichtes das Moment der Kraft $\frac{pna^2}{2} \times GK$ dem Momente der Last, oder den Momenten ihrer beiden Theile $\frac{ad}{2} \times GN + ay \times GN$

$\times$ GN gleich, nämlich $\frac{pna^2}{2} \times \frac{a}{3} = \frac{ad}{2} \times \frac{2}{3} d + ay$ $\times (d + \frac{y}{2})$, oder $\frac{pna^2}{6} = \frac{d^2}{3} + dy + \frac{y^2}{2}$ seyn. Daher $y^2 + 2dy = \frac{pna^2}{3} - \frac{2d^2}{3}$; folglich $y + d = \sqrt{(\frac{pna^2}{3} + \frac{dd}{3})}$; und $y = \sqrt{(\frac{pna^2 + d^2}{3})} - d$; das heißt, die untere Mauerdicke AF samt der Anlage FF, nämlich AG ist $= \sqrt{(\frac{pna^2 + d^2}{3})}$; und die obere Mauerdicke BE, die ohne Anlage, AF ist $= \sqrt{(\frac{pna^2 + d^2}{3})} - d$.

Bestimmet man den Grad der Flieſsigkeit der Erde, oder ihres horizontalen Druckes n; nimmt dafür z. B. $\frac{1}{2}$, das Mittel zwischen der Festigkeit, wo $n = 0$, und der vollkommenen Flieſsigkeit, wo $n = 1$ ist; und seßet der Erde eigenthümliche Schwere $p = \frac{2}{3}$ von der des Mauerwerkes, wie gemeiniglich statt hat: so verändern sich obige Formeln in diese, $y + d = \sqrt{(\frac{2.1.a^2}{3.2.3} + \frac{d^2}{3})} = \sqrt{(\frac{a^2}{9} + \frac{d^2}{3})}$; und $y = \sqrt{(\frac{a^2}{9} + \frac{d^2}{3})} - d$.

Da nun die Erfahrung giebt, daß die nach dieser Formel gebauten Futtermauern gar wohl bestehen: so kann man immer den halben Grad der Flieſsigkeit, n $= \frac{1}{2}$ in der allgemeinen Formel annehmen. Denn mir scheint doch diese Betrachtung richtiger und allgemeiner, als die von der zermalmten aufgehäuften Erde. Indessen lasse ist einem jedem seine Meinung.

Wir

Wir haben zwar diesen Fall nicht mit ausgedrückt, in welchem die Erde höher als die Mauer oder gedrückte Fläche ist: allein, wenn man will, wird man den Ausdruck dafür leicht finden können. Man darf nur in der ersten Formel $pna(\frac{a}{2}+h)\times\frac{a}{3}=\frac{ad}{2}\times\frac{2}{3}d+ay(d+\frac{y}{2})$; und endlich $y+d=\sqrt{(\frac{2pna}{3}(\frac{a}{2}+h)+\frac{dd}{3}}$ $=$ (wenn $p=\frac{2}{3}$ und $n=\frac{1}{2}$ ist) $\sqrt{(\frac{2a}{9}(\frac{a}{2}+h)+\frac{d^2}{3}}$.

Allein es wird nicht nöthig seyn beym Festungswalle nach dieser Formel zu rechnen: sondern man kann immer die, wo $h=o$ ist, als wenn die Höhe der Mauer, der von der Erde gleich wäre, nehmen.

Ein verständiger Ingenieur wird aus dieser Anweisung, auch für die Futtermauer mit Strebpfeilern (contreforts) leicht die Folgen und Rechnungen ziehen: die wir ihm überlassen.

# Von der Bewegung der Flieſsigen.

## 651.

Die flieſsigen Körper können wie die festen Körper, durch Antreibung einer gewissen Kraft, z. B. der Schwere, eines beständigen Druckes, des Stoſses, u. d. g. beweget werden. Vermög ihrer Schwere fallen sie von der Höhe in niedrige Oerter; laufen auf schiefen Ebenen, in abhängigen Rinnen, Canälen, Flusbettern hinab. Vermög des Druckes flieſsen sie aus vollen Gefäſsen durch untere Oeffnungen heraus; und steigen

gen in Röhren, und durch verschiedene Maschinen in die Höhe. Was den Fall, die Bewegung kraft der Schwere betrifft; so haben sie keine andere Gesetze, als die festen Körper, wovon wir schon gehandelt haben: aber ihre Bewegung durch die Oeffnungen der Gefäße, durch Röhren, Canäle, Flüsse, hat eigene Gesetze; von denen hier zu handeln. Die hydraulischen Maschinen werden den Schluß des ganzen Werkes machen, nachdem vorher noch von dem Stoße und Widerstande der Fließigen wird gehandelt worden seyn.

652. Betrachten wir zuerst, wie das Wasser, oder jedes andere Fließige aus vollen Gefäßen (Fig. 257 u. 258) durch die untern Oeffnungen PQ im Boden, oder zur Seite ausrinnt. Wir beobachten da, daß das obere Wasser in AB, TV, ꝛc. fast senkrecht hinab fällt; das untere aber, bey HE, sich wendet und nach der Oeffnung drängt, wie die zwey Figuren weisen; wie auch daß die **Wasserader**, der Strom des ausfließenden Wassers, auserhalb der Oeffnung, auf eine kleine Distanz immer enger, schmäler werde; so daß nach Hrn. **Bossut Hydrodynamik** I. 231 der kleinste Durchschnitt dieses Stromes pq zu der Oeffnung PQ sich wie 5 zu 8, der Fläche nach, verhalte; und die Distanz Qq = Pp zwischen beiden, beynahe dem Halbmesser der Oeffnung gleich sey; in dem Falle aber, wo eine kleine Röhre aus dem Gefäße geht, dieser ihre Oeffnung zu dem kleinsten Durchschnitte der Wasserader das Verhältniß 16 zu 13 habe. Ferner ist auch kein Zweifel, daß, da das Wasser unten durch PQ ausfließt, das im Gefäße ABDC sinken müsse; es mag dieses nach und nach leer werden, oder durch Zugießen beständig voll bleiben; und zwar verhält sich die Geschwindigkeit des Wassers in was immer für einem Durchschnitte des Gefäßes AB, oder TV zu der vom Wasser in der Oeffnung PQ, wie diese Oeffnung PQ zu dem Durchschnitte

te AB, oder TV, der Fläche nach. Denn es sinke z. B. das Wasser in dem Gefäße, in einem Augenblicke, von AB in ab; so daß sein körperlicher Inhalt AB×aA ist; und indessen fließe durch die Oeffnung eben soviel aus, welches PQ × Qg seyn soll: so ist des Wassers Geschwindigkeit in AB zu der in PQ, wie Aa zu Qg. Nun ist AB × Aa = PQ × Qg: folglich Aa : Qg = PQ : AB; oder die Geschwindigkeit des Wassers im Durchschnitte, zu der vom Wasser in der Oeffnung, wie die Oeffnung zum Durchschnitte; und so umgekehrt. Bossut nimmt für die Oeffnung den kleinsten Durchschnitt der Wasserader an; und setzet pq statt PQ.

653. Die Mengen vom Fließigen pqxy, iktz (Fig. 259 u. 260) einer oder verschiedener Art, die in gleicher Zeit mit gleichgeförmiger Geschwindigkeit aus den Gefäßen MD, EH, durch die Oeffnungen pq, ik auslaufen, sind wie die Produkte dieser Oeffnungen in die Geschwindigkeiten ihrer Ausgüsse; wie klar ist. Denn, wenn diese Produnkte pq × qx, ik × kt sind: so sind sie auch die Mengen; und die Geschwindigkeiten qx, kt. und dieß gilt so wohl bey gleich- als ungleichartigen Fließigen, wie ebenfalls klar ist.

654. Wie ist nun aber wohl die Geschwindigkeit der so ausrinnenden Fließigen?

Diese zu finden, seyen die Höhen der Fließigen in den Gefäßen (Fig. 259 u. 260) hq : lk = h : H; die Oeffnungen pq : ik = e : E; die Geschwindigkeiten der Fließigen in diesen Oeffnungen qx : kt = g : G; die Dichte des ersten Fließigen zu der vom andern = d : D; und ihre in einem Augenblicke ausfließende

Mas-

Massen = m : M : so kann man die augenblicklichen Bewegungen durch diese Massen multiplicirt mit ihren Geschwindigkeiten, nämlich durch mg, MG ausdrücken. Nun sind diese Bewegungen die Wirkungen der auf die Oeffnungen drückenden Kräfte der Fließigen: welche sich wie die Produkte der Grundflächen in ihre Höhen und Dichte, nämlich wie ehd : EHD verhalten. Mithin hat man mg : MG = ehd : EHD. Es verhalten sich aber die Massen, wie die Dichten multiplicirt mit den Räumen die sie einnehmen, nämlich m : M = deg: DEG. Daher degg : DEGG = ehd : EHD; und endlich gg : GG = h : H; oder g : G = √h : √H; das heißt:

Es verhalten sich die Geschwindigkeiten der in Gefäßen enthaltenen, durch untere Oeffnungen ausströmenden Fließigen, wie die Quadratwurzeln der Höhen der Fließigen über den Oeffnungen; es mögen die Fließigen von gleicher oder ungleicher Dichte, mithin von einerley Art oder verschiedener Art Schwere; und die Oeffnungen gleich oder ungleich seyn.

Jedoch versteht sich, daß das Gefäß oben in AC viel weiter als die Oeffnung PQ ist, damit das Fließige mit der erfoderlichen Geschwindigkeit sinken oder stets drücken könne (652): ja es läßt sich nach diesem Satz, diese erfoderliche Weite des Gefäßes überall bestimmen. Sie muß nämlich überall, z. B. in TE (Fig. 261) so groß seyn, daß dadurch, durch ET, vermöge dasiger Geschwindigkeit, welche wie die Quadratwurzel der Höhe des Fließigen über dieser Weite, nämlich wie √(VB) ist, so viel von dem Fließigen durchgehen kann, als unten durch die Oeffnung PQ heraus läuft. Daher muß ET × √(VB) = PQ × √(DB); oder wenn die

Oeff-

Oeffnung PQ eine beständige Gröſse = e, wie auch die ihr zugehörige Höhe BD eine solche = h; und die Weite ET = y, und die ihr zugehörige Höhe VB = x veränderlich sind, $y\sqrt{x} = e\sqrt{h}$, folglich $y : e = \sqrt{h} : \sqrt{x}$; oder $y^2 : e^2 = h : x$ seyn. Sind die Oeffnung und Weite des Gefäſses kreiſsförmig, und e und y die Durchmesser davon: so wird $y^2\sqrt{x} = e^2\sqrt{h}$; mithin $y^4x = e^4h$; und $y^4 : e^4 = h : x$; oder $y : e = \sqrt[4]{h} : \sqrt[4]{x}$; und $y = e\sqrt[4]{\frac{h}{x}}$. Daher dieser Satz.

Es muß sich irgendwo die Weite des Gefäſses zu der Oeffnung, wie die Quadratwurzel der Höhe des Flieſsigen über der Oeffnung, zu der Quadratwurzel seiner Höhe über dieser Weite verhalten. Oder: Es muß sich der Durchmesser dieser zirkelförmigen Weite zu dem Durchmesser dieser zirkelförmigen Oeffnung, wie die vierte Wurzel der Höhe des Flieſsigen über der Oeffnung, zu der vierten Wurzel der Höhe über der Weite verhalten.

Hieraus folgete nun freylich wohl, daß das Gefäſs an seinem obersten Ende unendlich weit seyn müßte, wenn des Flieſsigen Ebene oben horizontal bleiben sollte: allein es ist dieses in den Fällen, wo man dergleichen Gefäſse brauchet, eben nicht nöthig. Denn wenn auch das Wasser oben in der Mitte eine kleine Grube machet; so schadet dieses doch nicht: indem diese desto kleiner ist, je weiter oben das Gefäſs ist; und meistens gar unmerklich ist; und man nur um so viel, als die Tiefe der Grube beträgt, das Gefäſs höher machen könnte, um an der Geschwindigkeit nichts zu verlieren: welches aber bey ziemlich weiten Gefäſsen für nichts zu rechnen ist.

656. Aus der (654) gefundenen Verhältniß der Geschwindigkeiten der aus Gefäßen durch untere Oeffnungen ausströmenden Fließigen, g: G = √h: √H erhället auch, daß des Fließigen Geschwindigkeit just derjenigen gleich ist, welche der Körper erhält, da er durch die Höhe h oder H, ungehindert senkrecht fällt. Denn setzen wir diese Höhe h sey unendlich klein; so ist die dadurch erlangte Geschwindigkeit just diejenige, welche die Schwere in einem Augenblicke hervorbringet: weil bey dieser unendlich kleinen Höhe, des Gefäßes Weite der Oeffnung gleich gesetzet werden kann. Nenne ich diese von der Schwere beym Fallen hervorgebrachte Geschwindigkeit g', G': so hat man √h : √H = g' : G'. Nun ist diese unendlich kleine Geschwindigkeit des Falles g' der vom Ausflusse g gleich; mithin auch G' = G; wie schon gesagt: weil auch √h : √H = g : G ist.

657. Es ist offenbar, daß das, was bisher von der Geschwindigkeit der aus Gefäßen auslaufenden Fließigen bey den Oeffnungen im Boden gesagt worden, auch bey denen gelte, welche zur Seite sind, wie Fig. 257 weiset; wenn diese in Ansehung der Höhe des Fließigen über der Oeffnung sehr klein sind: indem der Druck der Fließigen nach allen Seiten gleich geschieht; und wie die Quadratwurzel der Höhe ist. So ist dann auch diese Geschwindigkeit der Fließigen durch die Seitenlöcher; und zwar so groß, als wenn es durch diese Höhe gefallen wäre: und es würde, wenn die Richtung der Oeffnung aufwärts gienge, wieder eben so hoch, als dieser Fall ist, steigen (Der Luft Widerstand und Reibung bey Seite gesetzt).

658. Wie ist es mit der Luft, einem elastisch Fließigen; wenn es in einem Gefäße eingeschlossen ist und durch eine darin befindliche Oeffnung ausströmet, oder herausbläst? wie groß ist ihre Geschwindigkeit?

Da ist klar, wenn die eingeschlossene Luft nicht mehr gepreßt ist, als die äusere, sondern dieser gleich ist, daß es nicht herausblasen könne. Aber ich will setzen, die eingeschlossene Luft, sie mag gepreßt, oder so dicht, oder so dünn seyn, als sie will, blase aus dem Gefäße in einen luftleeren oder ganz leeren Raum: wie wird ihre Geschwindigkeit seyn? wird diese mit Abnehmung der Dichte, der elastischen Kraft der Luft, auch abnehmen folglich veränderlich seyn? oder wird sie beständig, immer gleich, seyn? und wie groß wird sie seyn?

Es sey demnach die verschiedene Dichte der zu verschiedenen Zeiten in dem Gefäße enthaltenen Luft D und d; in derer Verhältniß auch ihre gegen dieselbe Oeffnung drückende Kräfte K und k stehen; und die in zwey verschiedenen Augenblicken ausströmenden Massen seyen M und m; und ihre Geschwindigkeiten G und g. Mithin hat man K : k = D : d = MG : mg. Nun ist M : m = DG : dg. Daher ist D : d = DGG : dgg; folglich Ddgg = dDGG; und g = G; die **Geschwindigkeit stets gleich.**

Wie groß sie nun ist? Wir dürfen sie nur für einen Fall finden, der für alle gilt. Wir wollen also die natürliche Luft nehmen, die mit einer Queckfilbersäule von 28 Zoll oder $2\frac{1}{3}$ Schuh im Gleichgewichte steht, die wir 1000 mal leichter als Wasser, oder 14000 mal leichter als Queckfilber setzen. Wäre sie durchaus gleichdicht: so würde die Höhe dieser mit genannter Queckfilbersäule im Gleichgewichte stehenden Luftsäule 14000 × $2\frac{1}{3}$ = $32666\frac{2}{3}$ Schuh seyn. Mithin ist die Geschwindigkeit der aus dem Gefäße strömenden Luft so groß, als wenn sie oder ein anderer Körper im leeren Raume von dieser Höhe von $32666\frac{2}{3}$ Schuh gefallen wäre (656). Da nun ein Körper in einer Sekunde 15,1 Schuh hoch fällt (261); wovon die Geschwindigkeit für eine Sekunde 30,2 Schuh ist: so findet man die gesuchte Geschwin-

digkeit x, durch diese Proportion $\sqrt{(15,1)} : \sqrt{(32666\frac{2}{3})} = 30,2 : x$. Daher ist, wenn man sie quadrirt, $xx = 2.30,2.32666\frac{2}{3}$; und $x = \sqrt{(2.30,2.32666\frac{2}{3})} = \sqrt{(1973067,26)} = 1404$ Schuh.

Wozu dient diese Kenntniß? Man sieht daraus, 1) daß eine durch die gepreßte Luft, durch die Windbüchse, bewegte Kugel keine größere Geschwindigkeit als 1404 Sch. für eine Sekunde erlangen könne, 2) daß, wenn eine durch Pulver abgeschossene Kugel eine größere Geschwindigkeit, als 1404 Schuh für eine Sekunde, hat, sie einen luftleeren Raum hinter sich lasse. **Robins** hat sie in seiner Artillerie II. Cap. II. S. auf 1700 Schuh geschätzet. Er meint nämlich, wenn die Kugel diese Geschwindigkeit hat, wie sie durch seine Versuche in der Nähe des Geschützes beynahe gefunden worden; daß sie einen luftleeren Raum hinter sich lasse. Die 1700 Englische oder Londnerschuh betragen nun freylich nur 1593 Pariser- oder Wienerfortificationsschuh. Doch ist diese Zahl noch größer, als die wir gefunden. Allein er verneinet nicht, daß auch eine kleinere Geschwindigkeit der Kugel einen Luftleeren Raum hinter sich lassen könne. Und wer weis, ob die durch das Feuer aufgelößte elastische Materie des Pulvers eine größere Geschwindigkeit erhalten, und der Kugel mittheilen könne, als die gefundene von der in einen leeren Raum strömenden Luft? Wenn wir analogisch schließen: so kann sie keine größere erhalten.

659. Kehren wir wieder zum Wasser, zu den unelastischen Fließigen zurück; und suchen wir die mittlere proportionale Geschwindigkeit, mit der es durch ein viereckiges Seitenloch **MN** (Fig. 262) aus dem Gefäße **DG** strömet. Durch die **mittlere proportionale Geschwindingkeit** verstehen wir diejenige, mit welcher alle Wassertheilchen, die in einem Augenblicke ausströmen

mul-

multiplicirt werden müssen, damit man ein Produkt bekomme, welches demjenigen gleich ist, welches alle Wassertheilchen zusammen geben, da ein jedes mit seiner eigenen multipliciret wird. Setzen wir also des Loches Inhalt $LM \times MO = ba$, davon die Grundline $FO = LM$ horizontal ist; des Wassers Höhe über dem Loche $VK = h$; einen Theil von des Loches Höhe $KI = LX = MZ = x$; folglich $XZ = LM = b$; den unendlich kleinen Theil $Ii = dx$ vom verlängerten x: so ist das unendlich kleine Parallelogramm $Xz = bdx$; und darüber des Wassers Höhe $VI = h + x$; mithin des dadurch, durch Xz, strömenden Wassers Geschwindigkeit wie $\sqrt{(h+x)}$; und $bdx\sqrt{(h+x)}$ wie das Produkt dieses durchströmenden Wassers in seine Geschwindigkeit. Das Integrale davon ist $C + \frac{2}{3} b \sqrt{(h+x)^3}$. Dieß ist also die Summe der Produkte der durch die Oeffnung MX strömenden und mit ihren Geschwindigkeiten multiplicirten Wassertheilchen. Ist $x = o$; so ist auch diese Summe $C + \frac{2}{3} b\sqrt{(h+x)^3} = o$; mithin $C + \frac{2}{3} b\sqrt{(h)^3} = o$; und $C = -\frac{2}{3} b\sqrt{h^3}$. Daher das Produkt des durch die Oeffnung MX strömenden Wassers in die mittlere Proportionale Geschwindigkeit $\frac{2}{3}b\sqrt{(h+x)^3} - \frac{2}{3}b\sqrt{h^3}$. Wird $x = a$; so ist das Produkt $\frac{2}{3}b\sqrt{(h+a)^3} - \frac{2}{3}b\sqrt{h^3}$. Dividirt man dieß Produkt durch dem Inhalt der Oeffnung ab; so hat man für die gesuchte mittlere proportionale Geschwindigkeit

$$\frac{2b(\sqrt{(h+a)^3} - \sqrt{h^3})}{3ab} = \frac{2(\sqrt{(h+a)^3} - \sqrt{h^3})}{3a}$$

$$= \frac{2((h+a)\sqrt{(h+a)} - h\sqrt{h})}{3a}.$$

Es sey z. B. $a = 5$, und $h = 4$: so ist die mittlere Proportionalgeschwindigkeit $\frac{2(9.3 - 4.2)}{15} = \frac{2.19}{15}$

$$= \frac{38}{15} = 2\frac{8}{15}.$$

Seßet man $h+a = H = VR$; und $a = H - h = KR$; so verwandelt sich jener Ausdruck für die mittlere Proportionalgeschwindigkeit, in diesen $\frac{2(H\sqrt{H-h}\sqrt{h})}{3(H-h)}$.

Wird hier $h = o$, oder der Oeffnung Höhe $a = H$ so ist die mittlere Proportionalgeschwindigkeit $\frac{2}{3}\sqrt{H} = \frac{2}{3}\sqrt{(VR)}$; folglich die Höhe, worauf sie sich bezieht $\frac{4}{9}H = \frac{4}{9}VR$; das heißt:

**Wenn Wasser aus einer Rinne ausfließt, deren Höhe VR ist, und die immer voll erhalten wird: so ist die mittlere Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers, wie die Quadratwurzel von $\frac{4}{9}$ dieser Höhe; oder die Höhe, worauf sich die Geschwindigkeit bezieht, ist vier Neuntel dieser Höhe VR.**

Im vorigen Beyspiele, wo der Oeffnung Höhe $a = 5$ ist, ist daher die Höhe, worauf sich die mittlere Geschwindigkeit bezieht, $(\frac{38}{15})^2 = \frac{1444}{225} = 6\frac{94}{225}$; und **allgemein ist sie** $\frac{4(H\sqrt{H-h}\sqrt{h})^2}{9(H-h)^2}$; **die Höhe nämlich, von welcher ein Körper fallen muß, diese mittlere Geschwindigkeit zu erlangen.**

Hieraus sieht man auch, **wie man die mittlere Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers und die dazu gehörige Höhe,** bey anderen Oeffnungen, die eine andere Gestalt haben, z. B. dreyeckig fünfeckig, oder rund sind, **finde.**

Man summirt nämlich alle Produkte der unendlich kleinen Theile der Oeffnung in die Quadratwurzeln der Höhe des darüber stehenden Wassers; und dividirt diese Summe durch den Flä-

chen

cheninhalt der Oeffnung: so hat man die verlangte Geschwindigkeit. Quadrirt man diese gefundene Geschwindigkeit; so hat man die verlangte Höhe.

660. Nun können wir auch leicht die Menge des Wassers finden, welche aus einem Gefäße von einer bekannten Höhe h, das durch einen Zufluß immer voll erhalten wird, durch eine bekannte Oeffnung e, die im Boden oder zur Seite ist, in einer gegebenen Zeit z ausfließet. Nur muß hier durch h bey dem Gefäße mit der Seitenöffnung, die mittlere Proportionalhöhe, worauf sich die mittlere Geschwindigkeit bezieht, verstanden werden (659). Man suche nämlich zu der Quadratwurzel der Höhe $\frac{1}{2}p$, durch die ein Körper in einer Sekunde fällt, zu der Geschwindigkeit p, welche der Körper am Ende dieses Falles erhält (49), und zu der Quadratwurzel der Höhe h des Wassers im Gefäße, die vierte Proportionale; das ist, man mache diese Proportion $\sqrt{(\frac{1}{2}p)} : p = \sqrt{h} : x$ : so ist die vierte Proportionale $x = \sqrt{(2ph)}$ wenn sie mit der Oeffnung e multiplicirt wird, nämlich $e\sqrt{(2ph)}$ die in einer Sekunde ausfließende Menge des Wassers. Multiplicirt man diese mit der gegebenen und als eine Anzahl von Sekunden angenommenen Zeit z: so ist das Produkt $ez\sqrt{(2ph)}$ die gesuchte Menge vom Wasser, das in der Zeit z ausfließt. Nun fällt ein Körper in einer Sekunde 15,1 Schuh hoch, so daß $\frac{1}{2}p = 15,1$, und $p = 30,2$ Schuh ist: mithin hat man $ez\sqrt{(2ph)} = ez\sqrt{(60,4.h)}$ für die verlangte Wassermenge.

Es sey z. B. e ein Quadratschuh, z eine Sekunde, und $h = 15,1$ Schuh: so ist $ez\sqrt{(60,4.h)} = 1.1\sqrt{(60,4.15,1)} = \sqrt{(912,04)} = 30,2$ Kubikschuh.

Wenn die Menge des ausfließenden Wassers q ist: so kann man in dieser Gleichung $q = ez\sqrt{(60{,}4.h)}$, eine aus den vier Größen q, e, z, h, was man für eine will, als unbekannt annehmen, und finden, wie klar ist.

661. Nun Setzen wir ein zylindrisches oder prismatisches Gefäß EH (Fig. 260), darin des Wassers Höhe kl = h und der Boden oder die Weite GH = EF = b, und die Oeffnung im Boden ik = e ist, werde durch den Ausfluß des Wassers durch diese horizontale Oeffnung ik, nach und nach, ausgeleeret, ohne daß etwas dazu gegossen wird: man solle die Zeit Z finden, in welcher diese Ausleerung geschieht. Hier kann man sich das in dem Gefäße enthaltene Wasser als lauter solche Säulen il vorstellen, die die Oeffnung ik zur Grundfläche, und des Wassers Höhe kl zu ihrer Höhe haben; und daß eine solche Säule ik × kl = eh nach der andern durch die Oeffnung ik durchfalle. Mithin darf man nur die Zeit z suchen, in welcher eine solche Säule durch das Loch durchfallen kann, und diese Zeit z so vielmal nehmen, als solche Säulen in dem Gefäße enthalten sind; so hat man die verlangte Zeit Z. Daher darf man nur erst diese Proportion setzen: $\sqrt{(15{,}1)}$: $1'' = \sqrt{h} : z$; wo $z = \sqrt{\frac{h}{15{,}1}}$ die Sekunden ausdrückt, in welchen eine Säule durchfällt. Hernach diese: $e : b = \sqrt{\frac{h}{15{,}1}} : Z$; wo $Z = \frac{b}{e}\sqrt{\frac{h}{15{,}1}}$ die gesuchte Zeit in Sekunden giebt, in welcher das Gefäß ausgeleeret wird.

Es sey z. B. h = 15,1 Schuh, e ein Quadratzoll, und b = 10000 Quadratzoll: so ist Z $10000'' = 166' + 40'' = 2$ St. $46' 40''$.

662.

662. Nimmt man (660) in der Gleichung $q = ez\sqrt{(60{,}4.h)}$ für z die Zeit der Ausleerung) $Z = \frac{b}{e}\sqrt{\frac{h}{15{,}1}}$, (661) an, und setzet statt dieser, ihren Werth: so hat man $q = b\sqrt{\frac{h}{15{,}1}}\sqrt{(60{,}4.h)}$ $= b\sqrt{(\frac{60{,}4.hh}{15{,}1})} = b\sqrt{(4hh)} = 2bh$. Da nun bey der Ausleerung in dieser nämlichen Zeit nur die Quantität bh auslaufen kann: **so läuft dann bey der Ausleerung nur halb so viel heraus, als in der nämlichen Zeit heraus läuft, da das Gefäß durch Zugießung stets voll erhalten wird.**

663. Die Zeit x zu finden, in welcher das Wasser in zylindrischen oder prismatischen Gefäßen MD (Fig. 257 u. 258) bey der Ausleerung durch Boden- oder Seitenlöcher PQ, um eine gewisse Tiefe BV sinket. Ich nehme hier die Formel $Z = \frac{b}{e}\sqrt{\frac{h}{1{,}51}}$ aus (661); nenne die ganze Höhe des Wassers BD (Fig. 257) H, und den Theil der Höhe VD, h; nach der 258 Fig. bedeuten H und h die mittlern Proportionalhöhen worauf sich die mittlern Geschwindigkeiten beziehen; so daß nach beiden Figuren die gegebene Tiefe $BV = H - h$ ist; drücke so dann die Ausleerungszeit vom ganzen Gefäße oder der Höhe H durch Z $= \frac{b}{e}\sqrt{\frac{H}{15{,}1}}$ aus; und die Zeit der Ausleerung des letztern Theiles von der Höhe h durch $z = \frac{b}{e}\sqrt{\frac{h}{15{,}1}}$.

Mithin ist die gesuchte Zeit $x = Z - z = \frac{b}{e}(\frac{\sqrt{H} - \sqrt{h}}{\sqrt{(15{,}1}})$;

das ist:

Man bekommt die Zeit x, in welcher das Fließige in einem gleichweiten Gefäße um eine gegebene Tiefe BV, die man durch den Unterschied H—h einer größern H und kleinern h Höhe ausdrückt, sinket; wenn man erstlich des Gefäßes Weite b durch seine Oeffnung e dividiret; 2tens diesen Quotienten $\frac{b}{e}$ durch die Differenz der Quadratwurzeln $\sqrt{H}-\sqrt{h}$ der größern und kleinern Höhe multipliciret; und endlich dieses Produkt $\frac{b}{e}(\sqrt{H}-\sqrt{h})$ durch die Quadratwurzel $\sqrt{(15,1)}$ der Höhe, durch welche ein Körper in einer Sekunde fällt, dividiret.

Es versteht sich, daß in dieser Gleichung $x = \frac{b}{e}(\frac{\sqrt{H}-\sqrt{h}}{\sqrt{(15,1)}})$ eine aus den fünf Größen x, b, e, H, h, welche man will, als unbekannt angenommen, und gefunden werden kann.

664. Suchen wir nun auch die Zeit z, in welcher ein Gefäß ACqp (Fig. 263) von ungleicher Weite, die sich wie eine Potenz ihrer Höhe über der Oeffnung pq verhält, ausgeleeret werde, da diese Oeffnung pq=e, des Gefäßes Höhe pK=h, und seine oberste Weite AC=b, dem Flächeninhalte nach gegeben sind.

Es sey also eine beliebige Höhe pL=x, und die dazu gehörige Weite EG=y; und $h^n : x^n = b : y$; mithin $y = \frac{bx^n}{h^n}$. Ferner sey LI=dx, die unendlich kleine Höhe, um welche das Wasser in einem Augenblicke dz sinket. Dieß Element oder Blätchen von Wasser $ydx = \frac{bx^n}{h^n}dx$ ist eben der Quantität Wasser gleich, welche durch die Oeffnung pq durchfließt, wann das Wasser just die Höhe x hat; und dividirt durch die Oeffnung e,

stellt

stellt es, nämlich $\frac{bx^n}{eh^n} dx$, den Raum vor, durch welchen das Wasser sich in der Zeit dz beweget. Da nun der Raum dividirt durch die Geschwindigkeit, der Zeit gleich ist: so ist dz

$$= \frac{bx^n}{eh^n \sqrt{x}} dx = \frac{bx^{n-\frac{1}{2}}}{eh^n} dx;$$ folglich die Ausleerungszeit z

$$= \frac{2bx^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n+1)eh^n},$$ dem Verhältniß nach.

Fällt ein Körper durch eine Höhe x senkrecht, und ich will davon die Zeit z finden: so setze ich $dz = \frac{dx}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} dx$; folglich $z = 2\sqrt{x}$. Ist $z = 1''$; so ist $2\sqrt{x} = 2\sqrt{(15,1)}$.

Mithin ist in dieser Proportion $2\sqrt{(15,1)} : 1'' = \frac{2bx^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n+1)eh^n} : z$

das vierte Glied $z = \frac{bx^{\frac{2n+1}{2}}}{\sqrt{(15,1)(2n+1)eh^n}}$ die wirkliche Ausleerungszeit in Sekunden. Setzet man $x = h$: so ist z

$$= \frac{b\sqrt{h}}{\sqrt{(15,1)(2n+1)e}} = \frac{b}{e(2n+1)} \sqrt{\frac{h}{15,1}}.$$

Wenn man die hier zuletzt gefundene Zeit durch 2n+1 multipliciret; so bekommt man die Zeit der Ausleerung eines gleichweiten Gefäßes von denselben Benennungen b, h, e, (661). Mithin kann man auch aus der Zeit der Ausleerung eines gleichweiten Gefäßes, die von dem ungleichweiten mit diesen Benennungen finden: wenn man jene Zeit mit 2n+1 dividiret.

Wir wollen $n = 2$ setzen, das ist, es sollen sich die Weiten des Gefäßes, oder seine Durchschnitte, welche auf die Höhe als die Axe pK senkrecht sind, wie die Quadrate der Höhen verhalten, welche die Eigenschaft der Parabel ist: so ist

$z = \frac{b}{5e} \sqrt{\frac{h}{15,1}}$. Ein solches Gefäß leeret sich also fünfmal geschwinder aus, als das gleichweite, welche dieselben Benennungen b, e, h, oder durchaus dieselbe Weite, Oeffnung und Höhe hat.

Will

Will man die Zeit finden, in welcher das Fließige in dem Gefäße, dessen Höhe pK = h ist, um den Theil KL = h — x sinket: so ist $dz = -\frac{bx^n}{eh^n\sqrt{x}}dx = \frac{2bx^{n-\frac{1}{2}}}{eh^n}dx$; folglich $z = C - \frac{2bx^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n+1)eh^n}$, verhältnißmäßig; und $C = \frac{2bh^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n+1)eh^n}$, weil z = o, wenn x = h. Daher $z = \frac{b(h^{\frac{2n+1}{2}} - x^{\frac{2n+1}{2}})}{(2n+1)eh^n\sqrt{15,1}}$; und $z = \frac{bh^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n+1)eh^n\sqrt{15,1}} = \frac{bh^{\frac{1}{2}}}{(2n+1)e\sqrt{15,1}}$ wie vorher, wenn x = o ist, in der Wirklichkeit.

665. Wir wollen ein Gefäß finden, worin das Wasser beym Ausfließen durch die untere Oeffnung, in gleichen Zeiten gleich tief sinket. Da muß also (664) der Ausdruck $dz = \frac{bx^n}{eh^n\sqrt{x}}dx$ wie auch dx eine beständige Größe, sich immer gleich seyn. Dieß aber ist; wenn man dx stets gleich, = 1 wie man thun kann, und $n = \frac{1}{2}$ setzet: denn so ist $dz = \frac{b\sqrt{x}}{e\sqrt{(hx)}}dx = \frac{b}{e\sqrt{h}}$. Mithin ist hier (cit. §.) des Gefäßes Weite $y = \frac{b\sqrt{x}}{\sqrt{h}} = b\sqrt{\frac{x}{h}}$; das ist, jeder Durchschnitt y, welcher auf die Achse pK senkrecht ist, wie die Quadratwurzel $\sqrt{x}$ seiner Höhe x über dem Loche pq. Dieß ist die Eigenschaft der Parabel vom ersten Geschlechte; wo x die Abscisse und y die Ordinate ist.

Will man die Ausleerungszeit von diesem Gefäße wissen; so darf man $dz = \frac{bdx}{e\sqrt{h}}$ nur integriren: so findet man $z = \frac{bx}{e\sqrt{h}} = \frac{b}{e}\sqrt{h}$, wenn x = h ist. Das ist, die Ausleerungszeiten verhalten sich, wie $\frac{b}{e}\sqrt{h}$. Und man findet die wirkliche in Sekunden, wenn man diesen Ausdruck durch $2\sqrt{(15,1)}$

dividiret (S. cit.); nämlich $z = \frac{b}{2e}\sqrt{\frac{h}{15,1}}$. Dieses Gefäß leeret sich also in der Hälfte von der Zeit aus, in welcher sich das gleichweite mit denselben Benennungen ausleeret.

Sollen des Gefäßes Durchschnitte, und Oeffnung kreißförmig seyn: so können die Größen b, y, e, welche vorher Flächen bedeutet haben, nun die Durchmesser seyn. Man setzet also statt derselben, in allen vorigen Ausdrücken, $b^2$, $y^2$, $e^2$. So hat man $y^2 = b^2\sqrt{\frac{x}{h}}$; folglich $y = b\sqrt[4]{\frac{x}{h}}$. Dieß ist die Parabel vom dritten Geschlechte. Es müssen sich nämlich die Durchmesser der Weiten überall, wie die vierten Wurzeln ihrer Höhen über dem Loche verhalten. Theilete man z. B. die Höhe pK in 81 gleiche Theile; so müßten sich diese Durchmesser der Weiten, bey den Höhen 1, 16, 81, wie 1, 2, 3 verhalten.

Die Ausleerungszeit bleibt bey dieser letzten Formel, die nämliche, wie bey der ersten, wenn jener Quotient $\frac{b}{e}$ diesem $\frac{b^2}{e^2}$ gleich ist: denn hier ist die Ausleerungszeit $z = \frac{b^2}{2e^2}\sqrt{\frac{h}{15,1}}$. Beym zylindrischen Gefäße, mit ähnlichen Benennungen, wäre also die Ausleerungszeit $z = \frac{b^2}{e^2}\sqrt{\frac{h}{15,1}}$, nämlich noch einmal so groß, als bey dem paraboliſchen; wie vorher.

666. Es seyen zwey vereinigte Gefäße LS, AN (Fig. 264) wo das Wasser aus dem einen in das andere, durch die untere Oeffnung TM kommen kann; das eine LS werde durch einen Zufluß stets voll Wasser erhalten: es fragt sich in welcher Zeit das andere AN, durch Eindringung des Wassers durch die Oeffnung TM, voll werde. Es ist hier klar, daß, wenn noch gar kein Wasser in dem Gefäße AN ist, des eindringenden Wassers Geschwindigkeit, wie die Quadratwurzel von LT oder AM seyn werde; und wie die Quadratwurzel von LX oder AR, wann das Wasser schon bis RS gestiegen; sodann, wie die Quadratwurzel von LE oder AE, wann es bis EG gestiegen; u. s. f. Das heißt, die Geschwindigkeit ist stets, wie die Quadratwurzel der Höhe AE des noch leeren Raumes AG des anzufüllenden Gefäßes AN. Mithin wird es in der nämlichen Zeit angefüllet, in welcher es sich ausleeret,

leeret, da es gleichweit ist: welche Zeit schon (661) bestimmet worden.

Ist die Weite unterschieden; so ist die Zeit freylich anders: die ich dem Leser zu bestimmen überlasse, um dieses Werk nicht zusehr auszudehnen.

667. Ich setze nun beide Gefäße LS, AN (Fig. 265) gleich, und gleichweit; und das erste LS sey anfangs voll, und leere sich durch die Oeffnung TM in das andere AN nur halb aus: denn, wann das Wasser in beiden gleich hoch steht; so ist das Gleichgewicht, und es bewegt sich nicht. Es fragt sich, in welcher Zeit dieses geschehen werde; diese halbe Ausleerung des einen, und halbe Anfüllung des andern.

Es sey also des Gefäßes Höhe LT=a, und der ausgeleerte Raum IE des ersten, dem angefülten MS des andern gleich, und eines jeden Höhe LE=MR=x; folglich EX=ER =a—2x. Der Gefäße Weite ST=MN=AC=LI sey wieder b, und die Oeffnung T oder M, wieder e, wie oben: so hat man, wenn die gesuchte Zeit z ist, $dz = + \frac{bdx}{e\sqrt{(a-2x)}}$

$= + \frac{b}{e}(a-2x)^{-\frac{1}{2}}dx$; folglich $z = C - \frac{b}{e}(a-2x)^{\frac{1}{2}}$. Es muß aber z=o seyn, wenn x=o ist: also ist $C = \frac{b}{e}\sqrt{a}$;

und $z = \frac{b}{e}(\sqrt{a}-\sqrt{(a-2x)})$, verhältnißmäßig; und nach 664 in der Wirklichkeit, unbedingt $= \frac{b}{e}\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{(a-2x)}}{2\sqrt{(15,1)}}\right)$.

Ist $x=\frac{1}{2}a$: so ist $z = \frac{b}{e}\sqrt{\frac{a}{4\cdot 15,1}}$; die Ausleerungszeit $\frac{1}{2}$ so groß, als wenn das ganze Gefäß LS frey, ungehindert ausgeleeret würde (661).

Man könnte etwa hieraus schließen, daß, wenn e=b ist, auch $z = \sqrt{\frac{a}{4\cdot 15,1}}$ sey. Allein der Schluß wäre unrichtig. Denn in dieser Auflösung wird vorausgesetzt, daß das Wasser in dem einen Gefäße ganz langsam falle; und so auch indem andern steige; und gleichsam ruhe, daß es blos mit seinem Drucke gegen die Oeffnung TM wirke; folglich die Be-

we-

wegung blos dem Unterschiede des Druckes gemäß sey. Dieß kann so nicht geschehen, wenn beide Gefäße und die gemeinschaftliche Oeffnung einerley Weite haben, und folglich gleichsam eine durchaus gleichweite Röhre ausmachen. Denn so muß das Uebermaß des Druckes eine große endliche Masse auf einmal bewegen; da vorher doch die in einem Augenblicke bewegte Masse, bdx, unendlich klein gesetzet ward. Die Gefäße müssen die oben 655 bestimmte größte Weite durchaus haben.

668. Setzen wir aber, es sey eine krumme gleichweite Röhre, wie Fig. 266, größtentheils, mit Wasser angefüllt, so daß des Wassers Oberfläche in beiden Schenkeln, beym Stande des Gleichgewichtes, der Ruhe, sich in der Horizontallinie AD befinde; und, wann das Wasser bey CD in dem Schenkel MN, einen Druck bekommt, die dasige Oberfläche hinab in GH, und die andere vom Wasser im Schenkel LK hinauf in EF steige; und das Wasser sodann sich selbst überlassen werde: und fragen wir, was da geschehen werde; so ist folgende Antwort. Weil das Wasser in dem einen Schenkel höher als in dem andern steht: so kann das Gleichgewicht nicht seyn; sondern es muß da eine Kraft, ein Gewicht, welches dem Gewichte der Wassersäule ET, die zur Höhe SE den Unterschied der Höhen der beiden Wassersäulen in den Schenkeln hat, gleich ist, das ganze Wasser ELNH in beiden Schenkeln und der Horizontalröhre LN zu bewegen trachten. Diese Kraft verhält sich zu der Masse oder dem Gewichte des zubewegenden Wassers, wie der genannte Unterschied der Höhen der Wassersäulen SE zu der ganzen Länge des in der Röhre ausgedehnten Wasserkörpers ELNH oder genauer xyz; oder wie jener halbe Unterschied EA zu dieser halben Länge xy. Nenne ich diesen halben Unterschied EA, x; und die halbe Länge xy, a; und die ganze Schwere des gesammten Wassers in der Röhre xyz, 1: so ist die antreibende Kraft $k = \frac{x}{a}$. Das Wasser muß sich dadurch nothwendig bewegen. Allein, wie sich das Wasser bewegt: so vermindert sich diese Kraft, oder EA=x; und zwar so, daß diese Verminderung von x sich verhalte, wie der Raum, durch welchen sich das Wasser bewegt; und die Kraft oder x=o wird, wann das Wasser in beiden Schenkeln gleich hoch, in AD, steht. Die Bewegung des Wassers muß dadurch beschleuniget werden, aber ungleich; weil die beschleunigungskraft abnimmt, wie der Raum der Bewegung zunimmt. Hiedurch erlanget also das Wasser eine Geschwindigkeit, mit welcher es sich fort bewegen, und in dem

andern

andern Schenkel der Röhre MN höher steigen muß; als es stand, da die Kraft im ersten Schenkel EL just ganz verloren war. Allein eben dadurch, durch das Steigen, entstehet in diesem andern Schenkel NM, auch ein Widerstand; welcher sich ebenfalls wie der Unterschied der Höhen des Wassers in beiden Schenkeln verhält; aber zunimmt wie der Raum der Bewegung zunimmt; folglich die Bewegung vermindert, wie sie die erste Kraft vermehret hat: daher die Bewegung, das Steigen aufhören muß, wann das Wasser in dem andern Schenkel die Höhe erreichet, die es im ersten gehabt. Wornach dieser Widerstand eine antreibende Kraft in der zweyten Röhre NM wird, wie die in der ersten LK war; folglich das Wasser wieder zurückfällt, und wieder in der ersten steiget; u. s. f. Dieß wechselweise Auf- und Absteigen des Wassers heißt das Schwanken oder Wallen.

669. Dieß Schwanken des Wassers hat eine völlige Aehnlichkeit mit dem Schwunge des Pendels; wenn dieser ein ganz kleiner Zirkelbogen PIp (Fig. 267), von der Sehne fast um nichts unterschieden ist. Was bey dem Schwanken der Raum ist, wodurch sich das Wasser bewegt; das ist hier der Bogen PIp wodurch sich das Pendel schwinget: was dort x der halbe Raum war; das ist hier der halbe Bogen PI: was dort a die Länge des halben Wasserkörpers war; das ist hier die Pendellänge OP. Gleichwie sich dort die bewegende Kraft k zu des Wassers Schwere 1, wie x: a verhält: also verhält sich auch hier die bewegende Kraft des Pendels in P zu seinem Gewichte 1, wie der Bogen BI zu der Länge OP; und die Kraft in Q zu demselben Gewichte, wie der Bogen QI zu derselben Länge QO oder OP; so daß die antreibende Kraft beym Pendel ebenfals abnimmt, wie der Raum der Bewegung zunimmt; und das Pendel auf der andern Seite wieder eben so hoch, bis p steiget, als es auf der ersten gefallen war, u. s. w. wie wir oben 250 u. folg. §en schon gesehen haben.

Gleichwie nun ein Pendel, das so kleine Schwünge machet, alle diese Schwünge, wenn sie auch ungleich sind, in derselben Zeit vollendet: also muß auch das Schwanken des Wassers in derselben Röhre, durch größere und kleinere Räume in gleicher Zeit geschehen. Und man kann denken, daß, wenn die Länge des Pendels OP der halben Länge des Wasserkörpers a, und der Bogen PI dem halben Raume x, wodurch das Wasser bewegt wird, gleich

ist,

ist, die Zeit vom Schwanken der vom Schwunge gleich sey. Denn wo Kräfte und Räume gleich sind; da müssen diese letzten von jenen in gleicher Zeit zurückgelegt werden: welches hier wäre; weil sowohl beym Pendel als beym Wasser die Kraft zu der Schwere 1 des zubewegenden Körpers sich stets, wie x zu a verhielte.

Daraus läßt sich auch noch schließen, daß das Schwanken des Wassers, es mag groß oder klein seyn, stets in gleicher Zeit geschehe: ungeachtet es mit dem Schwunge in Zirkelbögen anders ist. Denn bey dem Schwanken ist die antreibende Kraft stets, wie der halbe Raum der Bewegung: welches bey grössern Zirkelbögen nicht ist; sondern nur bey sehr kleinen gilt, wo der Sinus vom Bogen um nichts unterschieden ist.

670. Wir wollen alles das, was hieher von dem Schwanken des Wassers in solchen Röhren mittelst der Analogie mit dem Schwunge des Pendels, behauptet worden, noch durch die Betrachtung seiner Natur, durch die Rechnung selbst, ohne Analogie, zu bestimmen suchen.

Ich setze, das Wasser sey durch einen Druck, der bey CD (Fig. 266) in der Röhre MN geschehen, in der Röhre LK, so hoch als diese Röhre, nämlich bis K gehoben worden; und hernach wieder bis EF, nämlich durch die Höhe KE = r — x, wenn AK = r, und AE = x ist, gefallen. Die drückende Kraft bey diesem Stande ist das Gewicht der Wassersäule ET, deren Höhe ES = 2x ist; und sie verhält sich zum Gewichte 1 des gesammten Wassers, wie x und a, da des Wasserkörpers halbe Länge xy = a, ist, wie schon gesagt.

Mithin ist hier die Beschleunigungskraft $k = \frac{x}{a}$. Bringt nun die absolute oder ungehinderte Schwere eines Körpers nach einer Sekunde Fall eine Geschwindigkeit p, und nach der unendlichkleinen Zeit dz, die Geschwindigkeit pdz hervor: so muß diese Beschleunigungskraft k in einer solchen kleinen Zeit die Geschwindigkeit $\frac{xpdz}{a}$ hervorbringen. Nennen wir die durch den Fall, in EF oder genanntem Stande des Wassers, erlangte Geschwindigkeit g: so ist ihr unendlich kleiner Wachsthum dg $= \frac{xpdz}{a}$. Der in einem Augenblicke durchlaufene Raum ist — dx, weil der in der Zeit z durchlaufene r — x ist; mithin

$dz = -\frac{dx}{g}$; $dg = -\frac{xpdx}{ag}$; $gdg = -\frac{xpdx}{a}$; und $\frac{g^2}{2} = G - \frac{px^2}{2a}$. Weil aber $g = o$; wenn $x = r$: so ist $C = \frac{pr^2}{2a}$; daher $g^2 = \frac{pr^2}{a} - \frac{px^2}{a} = \frac{p}{a}(r^2 - x^2)$; und $g = \sqrt{(\frac{p}{a}(r^2 - x^2))}$.

Demnach ist $dz = -\frac{dx}{\sqrt{(\frac{p}{a}(r^2 - x^2))}}$; und $z = C - f\frac{dx}{\sqrt{(\frac{p}{a}(r^2 - x^2))}}$

$= C - f\frac{rdx}{r\sqrt{(\frac{p}{a}(r^2 - x^2))}} = C - \frac{I}{r\sqrt{\frac{p}{a}}} \times f\frac{rdx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$. Nun ist $\frac{rdx}{\sqrt{(r^2 - p^2)}}$ das Differenziale des Zirkelbogens PO, davon x die Abscisse ist, der Anfang vom Mittelpunkte A gerechnet. Folglich $z = C - \frac{PO}{r\sqrt{\frac{p}{a}}} = C - \frac{PO}{r}\sqrt{\frac{a}{p}}$. Ist $x = r = AK$: so muß $z = C - \frac{PO}{r}\sqrt{\frac{a}{p}} = o$ seyn. In diesem Falle aber wird PO ein Quadrant oder PK. Daher ist $C = \frac{PK}{r}\sqrt{\frac{a}{p}}$ $= \frac{Q}{r}\sqrt{\frac{a}{p}}$, wo Q einen Viertelkreiß oder Quadranten bedeutet: und überhaupt $z = \frac{PK}{r}\sqrt{\frac{a}{p}} - \frac{PO}{r}\sqrt{\frac{a}{p}} = \sqrt{\frac{a}{p}}$ $(\frac{PK - PO}{r}) = \frac{KO}{r}\sqrt{\frac{a}{p}} = \frac{KO\sqrt{4a}}{2r\sqrt{p}} = \frac{KO}{2r}\sqrt{\frac{2a}{\frac{1}{2}p}}$.

Es ist KO auch der Bogen, davon $r - x$ die Abscisse ist. Diese wächset, wann x abnimmt. Ist diese r, oder $x = o$ so ist $z = \frac{KP}{2r}\sqrt{\frac{2a}{\frac{1}{2}p}} = \frac{Q}{2r}\sqrt{\frac{2a}{\frac{1}{2}p}}$. Hier bedeutet $\frac{2a}{\frac{1}{2}p}$ die Anzahl Sekunden, die ein freyer Körper brauchet durch die Höhe zu fallen, welche der Länge des Wasserkörper in der Röhre, nämlich 2a gleich ist; und $\frac{Q}{2r}\sqrt{\frac{2a}{\frac{1}{2}p}}$ die Zeit, so lang die Beschleunigung im Schwanken dauert. Mithin verhält sich die Zeit, in welcher ein Körper durch die Höhe, die des Röhrwassers Länge gleich ist, fällt, zu der Zeit der Beschleunigung sei-

seines Schwankens, wie der Durchmesser 2r zum Quadranten Q.

Diese Zeit der Beschleunigung ist just der Zeit gleich, in welcher das Pendel, dessen Länge a ist, sich durch die erste Hälfte seines kleinen Bogens schwinget.

Es mag hier die Höhe r, von welcher das Wasser fällt, so groß oder so klein angenommen werden, als man will; die Zeit dieses Falles oder der Beschleunigung ist allezeit die nämliche: weil der Durchmesser 2r allezeit dieselbe Verhältniß zu seinem Quadranten hat.

Die hier am Ende der Beschleunigung erlangte Geschwindigkeit ist $g = r\sqrt{\frac{p}{a}}$; desto größer, je größer die Höhe r des Falles ist; und zwar, wie diese Höhe r. Und überhaupt ist die Geschwindigkeit, wie der Sinus OE des Bogens KO, welcher wie die Zeit ist.

Also muß das Wasser auf der andern Seite wieder eben so hoch steigen, als es gefallen, ist ein natürlicher Schluß: wozu es also auch wieder eben so lange Zeit brauchen wird, als es zum Fallen gebrauchet hat. Allein wir wollen diese zwey Sätze doch noch besser ausführen.

Gewiß ist es, daß das Wasser, nachdem es durch die Höhe $KA = r$ gefallen ist, und die Geschwindigkeit $g = r\sqrt{\frac{p}{a}}$ erlanget hat, sich fort beweget; in der ersten Vertikalröhre KL ferner hinab- und in der andern NM hinauf steiget; aber mit abnehmender Geschwindigkeit, weil in dem Augenblicke, da das Wasser über die Gränze AB abwärts, und über die Gränze CD aufwärts, tritt, statt der bewegenden oder beschleunigenden Kraft, sich ein Widerstand oder eine Verzögerungskraft einfindet. Dieser Widerstand ist, wann sich das Wasser in der ersten Röhre KL von A bis S gesänket, und in der andern MN von D bis U, eben so hoch, gestiegen ist, der doppelten Wassersäule CU, deren Höhe $DU = x$ seyn soll, gleich. Es ist also hier, wenn wir die Benennungen, wie vorher, bey der Beschleunigung, brauchen, dieser Widerstand oder die Verzögerungskraft $k = \frac{x}{a}$; und die von ihr augenblicklich her-

vorgebrachte oder in der Bewegung des Wassers verminderte Geschwindigkeit $dg = \frac{xpdz}{a}$; der augenblicklich durchlaufene Raum $= dx$, weil der ganze $UV = AS = x$ ist; mithin $dz = -\frac{dx}{g}$; und $dg = -\frac{xpdx}{ag}$, oder $gdg = -\frac{xpdx}{a}$.

Daher $\frac{gg}{2} = C - \frac{xxp}{2a}$; und weil $\frac{gg}{2} = \frac{rrp}{2a} = C$ seyn muß, wenn $x = o$ ist, $gg = \frac{p}{a}(rr - xx)$; und $g = \sqrt{(\frac{p}{a}(r^2 - x^2))}$.

$= UO \times \sqrt{\frac{p}{a}}$; die Geschwindigkeit nimmt ab, wie sie vorher zugenommen; weil itzt x zunimmt, da es vorher abgenommen: und die Geschwindigkeit ist null, wenn $x = r$, das Wasser wieder so hoch gestiegen, als es vorher gefallen war.

Suchen wir nun die Zeit z durch die Gleichung $dz = -\frac{dx}{g} = -\frac{dx}{\sqrt{(\frac{p}{a}(r^2 - x^2))}}$: so ist $z = C - \int \frac{rdx}{r\sqrt{\frac{p}{a}}\sqrt{(r^2 - x^2)}}$

$= \frac{2MP - MO}{r}\sqrt{\frac{a}{p}}$; weil $z = \frac{MP}{r}\sqrt{\frac{a}{p}}$ seyn muß, wenn $x = o$ ist; und $\frac{rdx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = MO$ in diesem Falle wenn $x = o$ ist, $= MP$ wird. Daher ist auch $z = \frac{MP + PO}{r}\sqrt{\frac{a}{p}} = \frac{MP + PO}{2r}\sqrt{\frac{2a}{\frac{1}{2}p}} =$ (wenn $x = r$ wird) $\frac{2MP}{2r}\sqrt{\frac{2a}{\frac{1}{2}p}} = \frac{Q}{r}\sqrt{\frac{2a}{\frac{1}{2}p}}$; das heißt:

Die ganze Zeit einer Schwankung, wodurch das Wasser in der ersten Röhre KL von der größten Höhe in die größte Tiefe, nämlich durch KZ, sinket, ist, dem Produkte der Zeit des freyen Falles durch die Höhe, welche des Röhrwassers Länge xyz gleich ist, in den Quotienten eines durch seinen Halbmesser AK dividirten Quadranten KP gleich. Und dieß ist auch just die Zeit, in welcher ein Pendel von der halben Länge des Röhrwas-

wassers, seinen Schwung, der ein gar kleiner Zirkelbogen ist, vollendet.

Um noch einen allgemeinen Schluß aus dem vorhergehenden zu ziehen: so sehen wir erstlich daraus, daß, wenn das Wasser in der einen Röhre KL über die Gränze AD des Gleichgewichtes, um was immer für eine beliebige Höhe AK = r gehoben wird, es in der andern Röhre MN eben so tief unter die Gränze des Gleichgewicht AD, bis V sinke. Diese Höhe AK und Tiefe DV zusammengenommen nämlich KZ = MV = 2r wollen wir den Raum oder die Größe der Schwankung nennen.

Beschreibet man mit diesem halben Raume der Schwankung r als dem Halbmesser an jeder vertikalen Röhre aus einem Punkte A oder D der Gränze des Gleichgewichtes einen Halbkreiß KPZ oder MPV: so stellen des Raumes oder Halbmessers Theile KE, KA, KS, KZ, als Abscissen, oder Quersine die Höhen, wodurch das Wasser in verschiedenen Zeiten, die sich wie die zugehörigen Bögen KO, KP, KO, KZ, verhalten, gesunken ist; und die zugehörigen Ordinaten oder Sine der Bögen, EO, AP, SO, o, die Verhältniß der da in E, A, S, Z, erlangten Geschwindigkeiten vor. Unter den vorhergehenden Formeln aber sind auch die Ausdrücke der wirklichen Zeiten und Geschwindigkeiten, für die durchlaufenen Räume.

Man sieht endlich, daß alle Schwankungen in derselben Röhre, große und kleine, in gleicher Zeit geschehen: welches bey dem Pendel, das sich in Zirkelbögen schwinget, nicht ist.

671. Diese Sätze vom Schwanken des Wassers in Röhren lassen sich auf andere wällförmige Bewegungen desselben anwenden.

Es sey ABCDEF (Fig. 268) ein stehendes Wasser, dessen Oberfläche, wällförmig auf- und absteiget. A, C, E seyen die Höhen der Wällen oder Wasserwogen; und B, D, F die darzwischen befindlichen Tiefen. Durch die stete Bewegung der Wasserwogen geschieht, daß die erst hohen Theile, hernach die tiefen: und die tiefen die hohen werden. Die Ursache dieser Bewegung ist allezeit die Schwere, der Druck des hohen Wassers. Daher ist klar, daß die wällförmige Bewe-

gung des Wassers, die Bewegung der Wasserwogen von derselben Art, als das Schwanken des Wassers in Röhren ist. Nur ist zu merken, daß das, was wir beym Röhrwasser seine Länge oder 2a genannt haben, bey den Wasserwogen die Distanz AB, oder BC der Höhe A von der Tiefe B ist: da das Wasser in dieser Tiefe B hernach so hoch als das in A steiget, und das auf der Höhe A hernach so tief als das in B sinket. Daher sieht man, wie alle Formeln und Ausdrücke vom Schwanken auf die Wällen anzuwenden, und daß ein Pendel, welches die Länge von der halben Distanz AB hat, einen Schwung in der Zeit machet, als sich die Wälle aus der Tiefe erhebet, oder von der Höhe A in die Tiefe sinket; folglich zwey Schwünge, bis die Wälle A sinket und sich wieder in A erhebet; oder bis die Wälle A sinket, und sich wieder in C erhebet. Das Pendel, welches nur einen Schwung thun sollte, bis die Wälle sinket und sich wieder hebt, müßte also viermal so lang, als das vorige, oder ihrer Länge, das ist, dem Raume ABC, durch den sie sich indessen beweget, gleich seyn. Ist die Tiefe B sehr gering, daß die Weite AC von einer Höhe A zur andern C, oder die Weite BD von einer Tiefe B zur andern D, welche die Breite der Wälle heißet, jenem Wege ABC beynahe gleich ist: so kann man auch sagen, daß die Zeit, in welcher ein Pendel von der Länge der Wällbreite einen Schwung thut, der Zeit gleich ist, in welcher die Wälle einmal auf und ab, oder durch ihre Breite geht.

Der Urheber dieser Erklärung der Wasserwogen ist Newton: und dieser erinnert selbst, daß sie nur eine Annäherung, zu dem sey, was wirklich ist.

672. Wir wollen hierauf gleich, eine etwas ähnliche Betrachtung anstellen. Es sey (Fig. 269) eine andere krumme gleichweite Röhre ABC, deren beide Ende A, C in derselben Horizontallinie AC sind; und das erste A sey mit einer andern weitern Röhre DE verbunden, so daß das Wasser aus dieser weiten, als aus einem Gefäße in die engere krumme Röhre treten kann. Nun setzen wir, beide Röhren, die enge und weite zusammen, seyen ganz voll Wasser; und die weite bleibe auch, durch einen Zufluß stets voll: es fragt sich, mit welcher Geschwindigkeit sich das Wasser in der engen Röhre bewegen werde, da das Gefäß weit genug ist, diese zu unterhalten?

Die-

Diese Aufgabe hat auch eine Aehnlichkeit mit der, wie das Wasser aus Gefäßen durch untere Oeffnungen ausfließe, davon wir oben (654 u. folg.) gehandelt haben; ist aber von der obern dadurch unterschieden, daß da in einem Augenblicke nur eine unendlich kleine, in eben demselben Augenblicke ausfließende Masse Wasser; hier aber eine endliche, eine große, in der ganzen krummen Röhre ABC enthaltenen Masse Wasser auf einmal beweget wird. Die drückende Kraft, welche dem Gewichte der Wassersäule eh gleich ist, die zur Grundfläche die Oeffnung A = e und zur Höhe AG = h hat, ist also durch diese Masse Wasser ea in der krummen Röhre, die zu ihrer Grundfläche dieselbe Oeffnung e und zur Länge die Länge der Röhre AiC = a hat, gehindert. Diese Masse ea drücket zwar nicht mit ihrem Gewichte gegen jene Kraft eh; sondern sie steht selbst unter sich im Gleichgewichte; sie widersteht aber mit ihrer Trägheit. Folglich muß jene Kraft eh durch ihre und diese Masse vertheilet werden. Ist also ihr ganzer Druck in A, der dem Gewichte der Wassersäule eh gleich ist, oder seine Beschleunigungskraft = 1; so ist der durch beide Massen eh + ae vertheilte Druck oder dieses seine Beschleunigungskraft $= \frac{eh}{e(a+h)} = \frac{h}{a+h}$: woraus ebenfalls 1 wird; wenn a = o ist. Da nun die erste, ungehinderte, unvertheilte Kraft, eine Geschwindigkeit $\frac{p\sqrt{h}}{\sqrt{(\frac{2}{1}p)}} = \sqrt{(2ph)}$ für eine Sekunde hervorbringt, wann ein Körper in 1 Sekunde durch $\frac{1}{2}p$ fällt: so muß die andere, vertheilte, Kraft, die Geschwindigkeit $\sqrt{(\frac{2phh}{a+h})}$ hervorbringen. Dieser Ausdruck der Geschwindigkeit ist dem $g = r\sqrt{\frac{p}{a}}$ (670) ähnlich: eine Bestätigung der Wahrheit:

Ist. z. B. $h = \frac{1}{2}p = \frac{30,2}{8}$ Schuh: so ist die unvertheilte Geschwindigkeit $\sqrt{(2ph)} = \sqrt{(\frac{1}{4}pp)} = \frac{1}{2}p = \frac{30,2}{2}$ = 15,1 Schuh. Ist nebst dem a = 2p = 60,4 Schuh; folglich a + h = 60,4 + 3,775 = 64,175; und $\sqrt{(64,175)}$ = 8,10; und $\sqrt{h}$ = 1,94: so ist die vertheilte Geschwindigkeit $\sqrt{(\frac{2phh}{a+h})} = \frac{15,1.1,94}{8,1} = 3,61$ Schuh:

wodurch das Wasser in der engen Röhre sich in 1 Sekunde bewegt.

Man kann jenen Ausdruck der Geschwindigkeit auch so, $h\sqrt{(\frac{2p}{a+h})}$, vorstellen; das heißt;

Man bekommt die gesuchte Geschwindigkeit, den Raum, durch welchen sich das Wasser in der engen Röhre, in einer Sekunde beweget; wenn man 1) die doppelte Geschwindigkeit 2p, die ein freyfallender Körper in einer Sekunde erlanget, durch die Länge a + h beider Röhren dividirt; 2) aus diesem Quotienten $\frac{2p}{h+a}$ die Quadrantwurzel zieht; und 3) diese $\sqrt{(\frac{2p}{a+h})}$ mit der weiten Röhre Länge, oder des Gefäßes Höhe h multipliciret.

Setzet man die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Wasser in der engen Röhre beweget, g; so ist $g = h\sqrt{(\frac{2p}{a+h})}$: wo man aus den drey Größen g, a, h, eine, welche man will, unbekannt annehmen und finden kann.

Will man die Quantität q Wasser wissen, die in einer gewissen Zeit oder Zahl von Sekunden z aus der Oeffnung C der engen Röhre herausfließt; so darf man nur die Geschwindigkeit $h\sqrt{(\frac{2p}{a+h})}$ erst mit der Oeffnung $C = A = e$ und hernach, dieß Produkt $eh\sqrt{(\frac{2p}{a+h})}$ durch die Zeit z multipliciren: so hat man die verlangte Menge Wasser $q = ehz\sqrt{(\frac{2p}{a+h})}$. Aus diesen fünf Größen g, e, h, z, a kann man eine unbekannt annehmen und finden, welche man will, wie klar ist.

Wollte ich z. B. des Gefäßes Höhe h finden; so quadrirte ich erstlich jene Gleichung: dadurch bekäme ich $q^2 = \frac{2e^2}{}$

$\frac{2e^2h^2z^2p}{a+h}$; mithin $aq^2 + hq^2 = 2e^2h^2z^2q$; und $h^2 - \frac{hq^2}{2e^2z^2p} = \frac{aq^2}{2e^2z^2p}$; endlich $h = \sqrt{(\frac{aq^2}{2e^2z^2p} + (\frac{q^2}{e^2z^2p})^2)} + \frac{q^2}{e^2z^2p}$.

Ist des Gefäßes Höhe h gegen der Röhre Länge a nicht beträchtlich: so kann man die Geschwindigkeit $g = h\sqrt{\frac{2p}{a}}$; und die ausfließende Quantität Wasser $q = ehz\sqrt{\frac{2p}{a}}$ setzen. Durch diese Gleichungen findet man leicht, jede als unbekannt angenommene Größe. Hier wäre z. B. $h = \frac{q\sqrt{a}}{ez\sqrt{(2p)}}$. Durch diese Gleichungen bekommt man also für die Geschwindigkeit g, und Quantität q etwas zu viel; folglich, für die andern Größen e, h, z, da eine von ihnen gesucht, und $\sqrt{\frac{2p}{a}}$ für beständig gesetzet wird, etwas zu wenig. Indessen verhalten sich doch, in diesem Falle, so wohl die Geschwindigkeiten g als die Mengen q des in gleichen Zeiten durch dieselbe enge Röhre ea fließenden Wassers beynahe, wie die Höhe h des Gefäßes ED.

Wie? wenn das Gefäß tiefer herabgienge, DL statt DE wäre? Weil das Wasser in dem Raume EK gleichsam ruhete, ohne Bewegung wäre, da das Gefäß DL, so weit wäre; so wird in diesem Falle, das, was wir vorher a geheißen haben, kleiner, nämlich $a = o\,i\,C$; so daß, wenn die Röhre durch die ganze Länge A o i C so weit als das Gefäß DE wäre, das Wasser in diesem Raume A o i C nicht zu betrachten, folglich $a = o$ wäre, und das in der Oeffnung C mit der Geschwindigkeit $g = \sqrt{(2ph)}$ herausspringen würde.

Wären nur die zwey obern Theile Ao und r C der Röhre so weit als das Gefäß: so wäre in den vorigen Formeln $a = o\,i\,r$; und dieses a verschwände gegen h, wenn oir unendlich klein würde; und es wäre auch in diesem Falle $g = \sqrt{(2ph)}$.

Wie weit muß aber wohl das Gefäß DE seyn, um die Geschwindigkeit stets zu unterhalten? fragt vielleicht jemand. Die Antwort ist §. 655. zu lesen. Wir haben es aber gleich weit gesetzt. Wenn es nur oben bey DH die erfoderliche Weite hat. Ein Beyspiel will ich geben, wie es da oben, in

DH, nicht unendlich weit seyn darf. Ich setze, das Gefäß sollte 15 Zoll hoch seyn: ich gebe einen zu; und suche seine Weite bey der Höhe 15: so ist nach obiger Formel die dasige Weite $y = e\sqrt[4]{\frac{h}{x}} = 1\sqrt[4]{\frac{16}{1}} = 2$, noch einmal so groß im Durchmesser, als die Oeffnung. Man machet aber gemeiniglich die Gefäße hundert und mehr mal größer im Durchmesser, als die Oeffnung: was wird da für ein Ueberschuß der Höhe kommen? Suchen wir ihn $= x$, nach dieser Formel $y = e\sqrt[4]{\frac{h}{x}}$; worin wir $y = 100$, $e = 1$, und $h = 1$ setzen. Da wird $y^4 = e^4\frac{h}{x}$ folglich $x = \frac{e^4h}{y^4} = \frac{1}{100000000}$ dieser Ueberschuß eins von hundertmillion Theilchen. Was ist das? nichts.

673. Suchen wir noch, in welcher Zeit dieses Gefäß DE (Fig. 269) ausgeleeret werde, da kein Zufluß ist. Wir haben die Geschwindigkeit $g = \sqrt{\frac{2phh}{a+h}}$ gefunden, wann es voll bleibt. Setzen wir, es sey schon etwas ausgeleeret worden; so daß des Wassers Höhe darin noch $x$; folglich um die Höhe $h - x$ gesunken ist. Es ist daher bey dieser Höhe $x$, des Wassers Geschwindigkeit in der engen Röhre $g = \sqrt{\frac{2px^2}{a+x}}$, und wenn des Gefäßes Weite $= b$, und die von der Röhre oder Oeffnung $A = C = e$: so ist die unendlich kleine Zeit

$$dz = -\frac{bdx}{e\sqrt{\frac{2px^2}{a+x}}} = -\frac{bdx}{e\sqrt{(2p)}}\sqrt{\frac{a+x}{xx}} = -\frac{bdx}{e\sqrt{(2p)}} \times \frac{a^{\frac{1}{2}}}{x}\left(1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} + \frac{x^3}{16a^3} - \frac{5x^4}{128a^4} + \frac{7x^5}{256a^5} - \frac{21x^6}{1024a^6}\ldots\right) = -\frac{bdx}{e\sqrt{(2p)}} \times a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2a} - \frac{x}{8a^2} + \frac{x^2}{16a^3} - \frac{5x^3}{128a^4} + \frac{7x^4}{256a^5} - \frac{21x^5}{1024a^6}\ldots\right)$$; folglich die Zeit, in welcher das Fließige durch die Höhe $h - x$ gesunken ist, $z = C - \frac{b}{e\sqrt{(2p)}} \times a^{\frac{1}{2}}\left(\log x + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{16a^2} + \frac{x^3}{48a^3} - \frac{5x^4}{512a^4} + \frac{7x^5}{1280a^5} - \frac{21x^6}{6144a^6}\ldots\right)$. Diese Zeit $z$ wird $= 0$; wenn $x = h$ ist.

Das

Daher ist die beständige Größe $C = \frac{b}{e\sqrt{(2p)}} \times a^{\frac{1}{2}} (\log h + \frac{h}{2a} - \frac{h^2}{16a^2} + \frac{h^3}{48a^3} - \frac{5h^4}{512a^4} + \frac{7h^5}{1280a^5} - \frac{21h^6}{6144a^6} \ldots)$;

und die Zeit $z = \frac{b}{e\sqrt{(2p)}} \times a^{\frac{1}{2}} (\log h + \frac{h}{2a} - \frac{h^2}{16a^2} + \frac{h^3}{48a^3} - \frac{5h^4}{512a^4} + \frac{7h^5}{1280a^5} - \frac{21h^6}{6144a^6} \ldots) - \frac{b}{e\sqrt{(2p)}} \times a^{\frac{1}{2}} (\log x + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{16a^2} + \frac{x^3}{48a^3} - \frac{5x^4}{512a^4} + \frac{7x^5}{1280a^5} - \frac{21x^6}{6144a^6} \ldots)$; folglich, da $x = o$ wird, die ganze Ausleerung $Z = \frac{b}{e\sqrt{(2p)}} \times a^{\frac{1}{2}} (\log h + \frac{h}{2a} - \frac{h^2}{16a^2} + \frac{h^3}{48a^3} - \frac{5h^4}{512a^4} + \frac{7h^5}{1280a^5} - \frac{21h^6}{6144a^6} \ldots)$.

Man kann auch hier $\frac{b}{e\sqrt{(2p)}} \times a^{\frac{1}{2}} \ldots = \frac{b}{e}\sqrt{\frac{a}{2p}} \ldots$ setzen: wo $\sqrt{\frac{a}{2p}}$ die Zeit in Sekunden ausdrückt, in welcher ein Körper durch eine Höhe von $\frac{a}{4}$ fällt.

Ist h gegen a gar klein: so darf man aus der unendlichen Reihe nur die zwey ersten Glieder nehmen, und $Z = \frac{b}{e}\sqrt{\frac{a}{2p}} (\log h + \frac{h}{2a})$ setzen.

674. Die bisherigen Sätze von dem Ausflusse des Wassers aus Gefäßen sind nützlicher, als vielleicht mancher denken wird. Denn nebst dem, daß jede Kenntniß der Natur gut ist, so gewähret diese von dem genannten Ausfluß, 1) das Vermögen bey Wasserkünsten viele nothwendige Bestimmungen zu machen, z B. die von der Größe des Wasserbehälters, damit er in einer gewissen Zeit leer werde; die von der Weite der Röhre und den Oeffnungen, damit das Wasser auf eine gewisse Höhe springe, oder sich auch mit einer gewissen Geschwindigkeit bewege, u. s. f. 2) Man wird dadurch in den Stand gesetzet, die Zeit einer Inundation, wann ein Ort unter Wasser gesetzet werden kann, zu berechnen, oder wenigstens zu schätzen, und deßwegen auch nützliche

An-

Anstalten zu treffen. 3) Man lernet dadurch der Ströme Kräfte, ihre Bewegung und Eigenschaft einsehen und beurtheilen. Es beruhet hierauf die wirkliche Einsicht der Kräfte der Menschen und Thiere, welche eine gewisse Last nur mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegen können. 5) Die Berechnung der meisten Maschinen kann nur mittelst dieser Kenntniß geschehen. Diese Behauptungen machen die Lehre vom Ausflusse wirklich wichtig: aber wie beweisest du sie? kann man sagen.

Die von den Wasserkünsten, und der Inundation brauchen keinen besondern Beweis: denn das sind wirkliche Ausflüsse aus Behältern, aus Gefäßen, aus einem Ort in den andern. Von der Ströme Kräften, Bewegung und Eigenschaft werden wir weiter unten handeln und sie ausführen. Aber die wirkliche Einsicht der Kräfte der Menschen und Thiere, welche eine gewisse Last, nur mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegen können, die beruhet hierauf, auf der Kenntniß des Ausflusses des Wassers aus Gefäßen: das habe ich niergends gelesen. Wir dürfen also nur das Gefäß DE mit der engen Röhre ABC (Fig. 296) betrachten. Das Wasser in dieser Röhre ABC, steht unter sich selbst im Gleichgewichte: und dazu braucht es keine fremde Kraft. Aber um bewegt zu werden, und zwar mit einer Geschwindigkeit $g = \sqrt{\frac{2phh}{a+h}}$, wird eine andere Kraft erfodert, welche dem Gewichte der Wassersäule A × AG = eh, gleich ist, die zur Grundfläche der Röhre Weite e, und zur Höhe die vom Gefäße h hat. Also müßte dann auch der Mensch um das Wasser mit dieser Geschwindigkeit $g = \sqrt{(\frac{2phh}{a+h})}$ zu bewegen, eine Kraft anwenden, welche dem Gewichte gesagter Wassersäule eh gleich ist.

Drückete der Mensch, mittelst eines Kolbens in o statt in A; und das Wasser in der Röhre o i C sollte sich mit der Geschwindigkeit $g' = \sqrt{\frac{2phh}{a'+h}}$ wo a', = oiC ist, bewegen: so wäre es eben soviel, als wenn das Gefäß DE bis o verlängert, und statt dessen dieses DL wäre: wo aber bey der Geschwindigkeit, h = AG bleibt, und bey der Kraft eh', die Höhe der Wassersäule, deren Gewichte sie gleich ist, nicht mehr AG, sondern Go = h' zu nehmen. So groß, als das Gewicht dieser Wassersäule eh', müßte also auch die von dem Menschen angewandte Kraft seyn, wenn er das Wasser in der Röhre oiC mit dieser Geschwindigkeit $g' = \sqrt{\frac{2phh}{a'+h}}$ bewegen wollte.

Soll-

Sollte aber diese Geschwindigkeit $g' = g$ der vorigen gleich bleiben: so änderte sich des Gefäßes Höhe AG. Wir setzen diese zweyte sey x: so ist $\sqrt{\frac{2phh}{a+h}} = \sqrt{\frac{2pxx}{a'+x}}$; mit hin $\frac{h^2}{a+h} = \frac{x^2}{a+x}$; $x^2 = \frac{a'h^2+xh^2}{a+h}$; und $x = \sqrt{(\frac{a'h^2}{a+h} + \frac{h^4}{4(a+h)^2})} + \frac{h^2}{2(a+h)}$. Ist nun des Gefäßes Höhe AG diesem gefundenen Werthe von x gleich: so wird hernach die Höhe h' der Wassersäule eh', deren Gewichte die Kraft gleich seyn muß, oG seyn. So kann man also leicht, in diesen und dergleichen Fällen, die Kraft des Menschen, der die Last mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegen soll, bestimmen.

Die Anwendung dieser Lehre bey Maschinen wird man leicht machen: und es versteht sich daß sie auch bey Thieren und andern Kräften angewendet werden kann.

675. Noch wollen wir eine Aufgabe von der Bestimmung der Wirkung der Kraft des Menschen, in einem ähnlichen Falle, daher setzen. Es sey (Fig. 270) die krumme gleichweite Röhre AEC voll Wasser; und dieses werde erstlich von der Kraft K mittelst des Kolbens O zurückgehalten, daß es nicht heraus fließen kann. Des horizontalen Schenkels AE Länge sey h; und des vertikalen BD, v; der innere Durchmesser der Röhre AF = DC oder des Kolbens unbekannt = y; das Vermögen der Kraft P, und ihre Geschwindigkeit für eine Sekunde g. Man soll der Röhre Durchmesser y finden, damit die Kraft das Wasser in dieser Röhre mit ihrer möglichen Gewalt P und Geschwindigkeit g bewegen könne.

Wendete man hier statt der Kraft des Menschen, ein Gefäß mit Wasser an: so müßte dieses die Höhe der vertikalen Röhre BC, wegen des Gleichgewichtes, mehr die Höhe x wegen der Geschwindigkeit haben. Hätte nämlich dieses Gefäß just die Höhe BC; so wäre zwischen dem Wasser im Gefäße und dem in der krummen Röhre FBD das Gleichgewicht. Hat es aber noch eine Höhe x über BC: so muß das Wasser in der Röhre FBD sich bewegen; und das im Gefäße ist wegen der Weite desselben anzusehen, als ruhete es; oder es beweget sich sehr langsam, daß es keine Hinderung machet.

Nun die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Wasser in der Röhre FBD bewegen soll, ist g. Setzen wir dieser Röhre Länge $h + v = a$: so ist (674) $g = \sqrt{\frac{2pxx}{a+x}}$; folglich

$ag^2$

$ag^2 + g^2x = 2pxx$; und $x = \sqrt{(\frac{ag^2}{2p} + \frac{g^4}{16pp})} + \frac{g^2}{4p}$. Ferner sey die Höhe des Gefäßes, das ist, x (das nun bekannt) $+ v = H$, und der Röhre kreißförmiger Durchschnitt, dessen Durchmesser y ist $= ny^2$, wo beynahe $n = \frac{11}{14}$ ist: so kann man einen Zylinder Wasser $ny^2H$ gedenken, dessen Gewicht, dem Vermögen P der Kraft gleich seyn muß.

Man suche also vermög des bekannten Gewichtes eines Kubikschuh Wassers, welches f seyn soll, einen Wasserkörper, dessen Gewicht dem Vermögen der Kraft P gleich ist; und welcher $\frac{P}{f}$ seyn wird; und setze sodann $\frac{P}{f} = ny^2H$: wodurch der Röhre Durchmesser $y = \sqrt{\frac{P}{nHf}}$ gefunden wird.

Ist der Röhre Durchmesser $D = \sqrt{\frac{P}{nHf}}$: so kann man aus den drey Größen, D, P, H, eine, die m n will, unbekannt setzen und finden.

Die Reibung ist nicht mit in die Rechnung gekommen, wie aus der Auflösung selbst erhället: sie müßte, wenn sie bekannt ist, vorher von P abgezogen werden.

Hiernach läßt sich leicht ein Beyspiel berechnen. Es sey $h = 10$, $v = 20$, mithin $a = 30$ Schuh; des Menschen Kraft $P = 25$ Pfund; und seine Geschwindigkeit $g = \frac{11}{3}$ Sch. (570): so ist $x = \sqrt{(\frac{30.(\frac{11}{3})^2}{2.30,2} + \frac{(\frac{11}{3})^4}{16(30,2)^2} + \frac{(\frac{11}{3})^2}{4.30,2}}$

$= \sqrt{(\frac{12100}{1814} + \frac{1464100}{26266752})} + \frac{1210}{10872} = \sqrt{6,7260}$

$+ 0,11 = 2,59 + 0,11 = 2,70$ Schuh. Daher $H = v + x = 22,70$ Schuh. Wir setzen nach dem Parisermaß, f $= 70$ Pfund: so ist der Röhre Durchmesser $y = \sqrt{\frac{25.14}{11.22,70.70}}$

$= \sqrt{\frac{5}{11.22,70}} = \frac{50}{353}$ Schuh $= 1,69$ Zoll.

II. Aufgabe. Setzen wir noch, es sey wieder eine andere krumme Röhre AEC (Fig. 270); woran der vertikale Schenkel BD enger, als der horizontale, welcher den vorher gefundenen Durchmesser $D = \frac{50}{353}$ Schuh $= 1,69$ Zoll ha-

he, der sich zu dem vom vertikalen, wie D : d verhalte; die Längen dieser Schenkel seyen wie vorher, h und v; und es soll so viel Wasser steigen, wie vorher; folglich muß die Geschwindigkeit G des Wassers in der vertikalen Röhre größer seyn, als die vorige g: man soll diese Geschwindigkeit G samt dem Vermögen P' der Kraft finden.

Da hier so viel Wasser steigen soll: so muß $G:g = D^2:d^2$; mithin $G = \frac{gD^2}{d^2}$ seyn.

Um das Vermögen der Kraft P' zu finden: so nehmen wir den vorigen Ausdruck der Geschwindigkeit $g = \sqrt{\frac{2pxx}{a+x}}$ und wenden ihn auf gegenwärtigen Fall an: so ist $G = \sqrt{\frac{2px'x'}{a'+x'}}$. In diesem ist $a' = v + \frac{hd^2}{D^2} = \frac{vD^2+hd}{D^2}$: weil das Wasser in der horizontalen Röhre AE, um soviel weniger widersteht, als es langsamer gegen das in der vertikalen BD zu bewegen; und, wenn $d = D$ ist, die erste Gleichung von g herauskommt, wie es seyn soll. Man findet hieraus, wie oben, $x' = \sqrt{(\frac{aG^2}{2p} + \frac{G^4}{16p^2})} + \frac{G^2}{4p}$. Nach dem macht man diese Proportion $v + x : v + x' = P : P'$; oder diese Gleichung $P' = fnD^2 \times (v+x')$; das heißt: der Kraft Vermögen P' muß dem Gewichte der Wassersäule gleich seyn, welche zum Durchmesser D, und zur Höhe $v+x'$ hat.

Setzen wir z. B. $d^2 : D^2 = 1 : 4 = 8 : G$; $h = 10$, und $v = 20$ Schuh, wie vorher; folglich $\frac{hd^2}{D^2} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$; und $a' = 22\frac{1}{2} = \frac{45}{2}$; mithin $G = \frac{11.4}{3} = \frac{44}{3} = 14\frac{2}{3}$; und $x' = \sqrt{(\frac{45.(44)^2}{2.9.2.30,2} + \frac{(44)^4}{81.16.(30,2)^2})} + \frac{44.44}{9.4.30,2} = \sqrt{400,95} + 1,78 = 20,02 + 1,78 = 21,80$; mithin $v+x' = 41,8$. Vorher war $v + x = 22,70$. Folglich ist die hiesige Kraft P' zur vorigen P, wie 41,8 zu 22,7 oder $P' = P + \frac{227}{418}P$; das heißt: Jetzt muß die Kraft mehr als um die Hälfte grö-

ßer

ßer als vorher seyn: oder da sie vorher 25 Pfund war; so muß sie jetzt 25 + 13,57 Pfund seyn.

Es ist also der Kraft sehr nachtheilig, wenn man bey Wasserkünsten, wo das Wasser durch Kolben bewegt wird, wie bey Druck- und Saugwerken, die Steig-Saug- und andere Röhren, wie auch Ventile und Klappen, enger, als den Stiefel machet. Man wird nach vorigen Beyspielen, die Rechnung leicht bey andern machen: also lasse ich es hierbey bewenden.

676. Noch eine Betrachtung über den Ausfluß des Wassers aus den Gefäßen durch untere Oeffnungen wollen wir machen; in dem Falle nämlich, da sich das Gefäß beweget.

Es sey (nach Hrn. Bossut Hydrodyn.) das Gefäß AD (Fig. 271) bis AB beständig voll Wasser; und werde durch das Gewicht R, mittelst eines dünnen schwerlosen Seiles HMNR, welches über zwey Rollen M und N geht, senkrecht in die Höhe gezogen: man fragt um den Druck, den das Fließige auf den unendlich kleinen Theil pq des Bodens ausübet.

Man nenne die Summe der Massen des Gefäßes AD und des darin enthaltenen Wassers P; und der Mittelpunkt der Schwere dieser ganzen Masse sey G. Setzen wir, daß diese zwey Körper R und P, wenn sie der freyen Wirkung der Schwere überlassen wären, in einer unendlich kleinen Zeit, die Räume, Rt, Gx durchlaufen hätten. Aber wegen der Wirkung des einen gegen den andern, durchlaufe der Körper R den Raum Rr; und der Körper P, den Raum Gy. Nennen wir die natürliche Schwere, wodurch die Körper in einem Augenblicke die Räumchen $Gx = Rt$ durchlaufen können, g; und die Beschleunigungskraft, wodurch sie die Räumchen $Gy = Rr$, in demselben Augenblicke durchlaufen, f: so ist $f = \frac{g(R-P)}{R+P}$; die Beschleunigung gleichförmig, bey einem, wie bey dem andern Körper. Die Kraft, welche ein jedes Theilchen der Masse P aufwärts drücket, ist also $g + f = \frac{2gR}{R+P}$; weil die

Wir-

Wirkung, wie die von diesen beiden Kräften, $xy = Gx + Gy$ ist. Daher muß der Druck, den das Fließige, in diesem Falle, vermög der Kraft $\frac{2gR}{R+P}$ auf den Boden und die Wände des Gefäßes machet, sich zu dem, den es bloß vermög der natürlichen Schwere ausübet, wie $\frac{2gR}{R+P}$ zu g, oder wie 2R zu R + P verhalten. Da nun der Druck auf die Fläche pq, kraft der Schwere, durch $s \times pq \times hq$, wo s die eigenthümliche Schwere bedeutet, vorgestellet wird: so folget, daß der im gegenwärtigen Falle, durch $s \times pq \times hq \times \frac{2R}{R+P}$ vorzustellen sey. W. z. f. w.

Wegen des Ausflusses aus diesem Gefäße könnten nun verschiedene Aufgaben aufgelöset werden: allein wir lassen sie dem Studirenden zu seiner eigenen Uebung über und setzen nur einige Folgen daher.

1) Die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers, ist wie die Quadratwurzel von $hq \times \frac{2R}{R+P}$. Sind diese Größen hq, R und P veränderlich; so verändert sich auch der Druck auf die Oeffnung und die Geschwindigkeit des dadurch fließenden Wassers.

2) Je größer das Gewicht R ist; desto größer ist der Druck und die Geschwindigkeit. Ist R gleichsam unendlich groß; so ist der Druck noch einmal so groß, als der von der natürlichen Schwere, und die Geschwindigkeit wie die Wurzel von 2hq. Ist aber R = P; so ist der Druck und die Geschwindigkeit, wie bey der natürlichen Schwere.

3) Ist hingegen P größer als R; das ist, vermindert sich R oder vermehrt sich P: so nehmen Druck und Geschwindigkeit ab; so daß, wenn R = o ist, Druck und Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers null seyen.

677. Hier wollte ich die Versuche des Herrn Bossut aus seiner Hydrodynamik, hersetzen, welche nur mit vieler Mühe und Kosten haben gemacht werden können: allein sie vergrößerten dieses Werk zuviel. Ich setze also nur das von ihm an-

gegebene Resultat seiner Versuche daher; und lasse diese den Liebhaber in dem 2ten Theile dieser Hydrodynamik, gleich zu Anfang, selbst lesen.

Dieß Resultat besteht darin, daß die natürliche Wasserverschwendung, welche durch untere Oeffnungen der Gefäße, worin das Wasser enthalten ist, vermög der Rechnung geschehen sollte, sich zu der wirklichen, wie beynahe 8 zu 5, oder genauer, wie 81 zu 50 verhalte; wenn bey der Oeffnung keine Röhre angebracht ist. Ist aber dabey eine kurze zylindrische Röhre von einigen, zwey oder mehrern Zollen, durch welche das Wasser fließen muß, angebracht: so verhalte sich die natürliche Wasserverschwendung, welche durch Rechnung gefunden wird, zu der wirklichen, wie 16 zu 13.

Bossut eigenet diesen großen Unterschied bloß der Zusammenziehung des Stromes des ausfließenden Wassers, der Wasseradern zu, wovon wir gleich anfangs dieser Lehre Erwähnung gethan. Es müßte nämlich durch die verschiedene Richtung des ausfließenden Wassers geschehen, daß es nicht mit voller Mündung auslaufe, sondern darin hin und her gleichsam leere Räume lasse: weßwegen es sich hernach auser der Mündung (der Oeffnung) sich enger zusammen zieht. Die Reibung des Wassers in der Oeffnung rechnet dieser Autor nicht, oder fast nur für nichts; betrachtet daher den von ihr verursachten Unterschied in der Verschwendung nicht.

Mariotte und Belidor haben aber hierauf, auf diese Reibung, allein gesehen, da sie den Unterschied der natürlichen und wirklichen Wasserverschwendung erklären wollten. Es hängt sich nämlich beym Ausflusse, Wasser an den Rand der Oeffnung: folglich wird hiedurch das Loch gleichsam enger; und es muß weniger durchfließen. Oder es kann wenigstens nicht alle mit der nämlichen Geschwindigkeit durchfliessen: folglich weniger, als wenn sie gleich wäre. Hieraus folget auch, daß desto mehr Wasser zurück gehalten wird; je größer der Umfang des Loches ist: weil desto mehr Wasser daran kleben bleiben kann: so daß das aufgehaltene Wasser, wie dieser Umfang oder der Durchmesser; das aber, was durchlaufen sollte, wie das Quadrat des Durchmessers der Oeffnung ist.

Diese beiden Erklärungen des Unterschieds der natürlichen und wirklichen Wasserverschwendungen durch Ausgußlöcher in

Ge-

Gefäßen, sind nun freylich sehr unterschieden: da die erste stets einen beständigen Theil der natürlichen, nämlich $\frac{5}{8}$ derselben für die wirkliche Verschwendung angiebt, die Oeffnung mag groß oder klein seyn; die andere aber zeiget, daß zwischen der natürlichen und wirklichen Verschwendung, bey verschiedenen Oeffnungen, keine beständige, nicht dieselbe Verhältniß sey.

Nach der letzten, der Belidorischen Erklärung müßte man ungefähr also rechnen: $M : m = D^2 : d^2$; mithin $M = \frac{mD^2}{d^2}$; und $M' : m' = D : d$; daher $M' = \frac{m'D}{d}$; wo M und m die Mengen Wasser vorstellen, die in gleicher Zeit, mit gleicher Geschwindigkeit, durch die verschiedenen Oeffnungen, deren Durchmesser D, und d sind, durchfließen sollen; M und m' aber die durch die Reibnng oder Anklebung aufgehaltene Menge. Also wäre hier die bey D wirklich durchfließende Wassermenge $Q = M - M' = \frac{mD^2}{d^2} - \frac{m'D}{d} = \frac{mD^2 - m'Dd}{d^2} = \frac{(mD - m'd)D}{d^2}$.

Man dürfte daher nur einen einzigen Versuch machen, wobey man berechnete, wie viel Wasser bey der Oeffnung vom Durchmesser d durchfließen sollte, welches m wäre; und beobachtete, wie viel wirklich durchfließt, welches $m - m'$ wäre. Diesen Versuch nimmt Belidor in seiner Wasserbaukunst 495. aus Mariottens Traktate von der Bewegung des Wassers an: wodurch dieser gefunden, daß bey der Oeffnung, deren Durchmesser $d = 3$ Linen war, statt 10 Maß $= m$ nur $7 = m - m'$ durchgeflossen, folglich $3 = m'$ zurück gehalten worden.

Setzet man diese Zahlen des mariottischen Versuches in die obigen Formeln: so hat man $M : M' = \frac{mD^2}{d^2} : \frac{m'D}{d} = \frac{10D^2}{9} : \frac{3D}{3} = 10D : 9$; das heißt: die Menge Wasser, welche durch die Oeffnung fließen sollte, verhält sich zu der zurückgehaltenen, wie der zehnfache Durchmesser der Oeffnung, dessen Einheit 1 Line ist, zu 9. Daher ist die natürliche Verschwendung 1 zu der wirklichen Q, wie $10D$: zu $10D - 9$; folglich $Q = \frac{10D - 9}{10D}$: welches kein beständiges

Verhältniß, wie $\frac{5}{8}$, ist; sondern sich mit D verändert. Ist z. B. D = 3 Linen; so ist Q = $\frac{2}{3}\frac{1}{0}$ = $\frac{7}{10}$: und ist D = 6 Linen; so ist Q = $\frac{5}{6}\frac{1}{0}$ = $\frac{17}{20}$ von der natürlichen Verschwendung. Die Namen, natürliche und wirkliche Verschwendung hätten auch anders heißen können: ich habe aber hierin andern Autorn gefolgt.

Das unbegreifliche hierin ist, daß diese Männer Bossut und Mariotte, die so viele große Versuche gemacht, in der Bestimmung der wirklichen Wasserverschwendung so sehr unterschieden seyn: da Bossut überhaupt bey allen Oeffnungen, ohne Zusatzröhre, $\frac{5}{8}$, und Mariotte nur bey der Oeffnung von 3 Pariserlinen, $\frac{7}{10}$ der natürlichen Verschwendung angiebt. Bossut hat meistens Oeffnungen von 1 Zoll gebrauchet. Hierbey wäre Q = $\frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{0}$, die wirkliche Verschwendung über $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$ der natürlichen; welches noch viel mehr, als $\frac{5}{8}$ ist. Was ist wohl zu thun? wem ist zu folgen? Ich für meinen Theil habe durch Versuche schon beobachtet, daß ein Unterschied der Verschwendung bey kleinen und großen Oeffnungen ist; daß bey kleinen, eine größere Menge Wasser in Ansehung derjenigen, welche durchfließen sollte, zurück gehalten wird, als bey größern Oeffnungen. Darum habe ich jenen Versuch nach Mariotten, und jene Regel nach Belidorn beygefüget.

678. Nachdem wir bisher so von dem Ausflusse des Wassers aus Gefäßen durch untere Löcher gehandelt haben: so können wir nun leicht auch die Geschwindigkeit des springenden Wassers, bey Wasserkünsten (Fig. 272); die Menge, die in einer gewissen Zeit springet; die Zeit, in welcher der Behälter AO ausgeleeret wird; die Höhe, auf welche das Wasser springet; u. s. f. bestimmen. Man darf dazu nur die bisher gegebenen Sätze und Formeln anwenden: weil es in Ansehung der Geschwindigkeit und Menge des ausfließenden Wassers, alles eins ist; die Oeffnung mag auf- ab- oder seitwärts gehen. Doch wollen wir 1) eine allgemeine Formel für die Geschwindigkeit des springenden Wassers hersetzen.

Bey dem springenden Wasser kömmt der Wasserbehälter AO mit seiner Weite AB = b; des Wassers Fall BO = h; die Röhre der Wasserleitung OE, mit ihrer Länge OE = a und ihrem Durchmesser OC = D, aus welcher das Wasser durch Oeffnungen F, G, H, M, N, deren Durchmesser d sind, springet, vor. Diese Oeffnungen sind entweder unmittelbar in der Wand der Röhre, wie F, G. H, oder in kleinen Aufsatz-

röh-

röhren, MK, NI, deren Längen c seyen, angebracht. Hat nun das Gefäß AO hinlängliche Weite: so wird, vermög 675 u. vorhergehenden, die Beschleunigungskraft $K = \frac{h}{\frac{ad^2}{D^2}+c+h}$

$= \frac{hD^2}{ad^2+D^2(c+h)}$; mithin des springenden Wassers Geschwindigkeit $g = \sqrt{\frac{2phhDD}{ad^2+D^2(c+h)}}$ seyn. Hier ist bey der Oeffnung F, $a = OF$; bey der G, $= OG$; bey der H, $= OM$; und $h = BO$; und $c = o$. Bey der Oeffnung M ist, $a = OK$ oder BQ und $h = MQ$; und bey der N, $= BP$, und $h = NP$: beyde Aufsatzröhren MK und NI werden als zylindrisch betrachtet.

Hieraus sieht man: daß des springenden Wassers Geschwindigkeit g desto größer sey; je größer der Fall h; je größer der Durchmesser der Leitröhre D; je kleiner ihre Länge a; je kleiner der Durchmesser d der Oeffnung; und je kürzer die Aufsatzröhre c ist.

Beyspiele lassen sich nach der Formel von der Geschwindigkeit $g = \sqrt{\frac{2phhDD}{ad^2+D^2(c+h)}}$ leicht berechnen. Setzen wir $h = 20$ Schuh, $D = 3$ Zoll, $a = 20$ Schuh, $d = 1$ Zoll, $c = 4$ Zoll: so ist $g = \sqrt{\frac{2.30.2.20.20.3.3}{20.1.1+3.3(4+20)}} = 30{,}3$ Sch. für eine Sekunde.

Die Leitröhre OE ist hier horizontal gesetzet worden. Ist sie abhängig, und nach 655 weit genug: so muß die Höhe ihrer Neigung mit zum Falle h gerechnet werden, &c.

2) Die Menge des in einer Zeit z springenden Wassers zu finden, da der Wasserhalter durch Zufluß stets voll bleibt: darf man nur die gefundene Geschwindigkeit g mit dieser Zeit z und dem Flächeninhalte der Oeffnung ndd multipliciren. Sie ist nämlich $q = nddgz = nddz\sqrt{\frac{2phhDD}{add+DD(c+h)}}$; im Beyspiele, wenn man $n = \frac{1}{14}$, $d = 1$ Zoll, $g = 30{,}2$

Schuh, und z = 60 Sekunden oder 1 Minute annimmt, $= \frac{11}{14} \times \frac{1}{12.12} \times 30{,}2 \times 60 = \frac{1661}{168} = 9\ \frac{149}{168}$ Kubikschuh.

3) Ein unendlich kleiner Theil der Ausleerungszeit z bey einer Höhe x des Wassers über der Oeffnung e = ndd ist hier $dz = \frac{bdx}{eg'} = \frac{bdx}{e\sqrt{\frac{2pxxDD}{ad^2+D^2(c+x)}}}$. Wäre aber ein freyer ungehinderter Ausfluß, ohne Leit- und Aufsatzröhre: so wäre die Geschwindigkeit $G' = \sqrt{(2px)}$, folglich diese Zeit $dz = \frac{bdx}{e\sqrt{(2px)}}$; das heißt: die unendlich kleinen Theile der Ausleerungszeit sind, da dx beständig ist, wie des Wasserhalters Weite, und umgekehrt, wie die Oeffnung e multiplicirt mit der Geschwindigkeit g. Folglich muß sich die ganze Ausleerungszeit eben so verhalten. Da wir nun die Ausleerungszeit bey ungehindertem Ausflusse (661 u. folg.) schon gefunden: so darf man nur diese Proportion g : G = Z : z, oder $\sqrt{2ph}$: $\sqrt{\frac{2phhDD}{ad^2+D^2(c+h)}} = Z : z$ setzen, wo Z die Zeit der ungehinderten Ausleerung, und z die hier gesuchte Zeit bedeutet; welche also $z = \frac{ZG}{g}$ ist; da die Wasserhalter gleiche Weite b, und Oeffnung e haben. Beyspiele kann man sich selbst leicht rechnen.

4) Man kann eben so leicht auch die Höhe finden, auf welche das Wasser springen muß, wenn man der Luft Widerstand nicht betrachtet. Denn das springende Wasser muß die Höhe seines Falles haben, wenn es nicht gehindert wird: indem ein gefallener Körper mit seiner erlangten Geschwindigkeit wieder eben so hoch steigen kann, als er gefallen ist. Da aber hier des springenden Wassers Geschwindigkeit g = $\sqrt{\frac{2phhDD}{ad^2+D^2(c+h)}}$ kleiner ist, als die $G = \sqrt{(2ph)}$, welche ein Körper ungehindert durch die Höhe h fallend erlangt: so darf man denn nur die der Geschwindigkeit g zugehörigen Höhe x des Falles suchen: welche man durch diese Gleichung

$2px = gg = \frac{2phhDD}{ad^2+D^2(c+h)}$ findet; und die folglich $x = \frac{gg}{2p}$ $= \frac{hhDD}{ad^2+D^2(c+h)}$ ist. In dem obigen Beyspiele, wo $g =$ 30,3 Schuh gefunden worden, wäre diese Höhe $x = \frac{30,3 \cdot 30,3}{2 \cdot 30,2}$ = 15,2 Schuh. Ohne Hinderniß sollte sie 20 seyn.

Aber auch die freyspringenden Wasser erreichen in der Luft nicht ganz wieder die Höhe ihres Falles. Mariotte und Bossut geben die Regel. Man müsse die Höhe des Sprunges h in Schuhen genommen durch 5 dividiren; und diesen Quotienten $\frac{h}{5}$ quadriren: das Quadrat $\frac{hh}{25}$ als Zoll genommen sey der Zusatz zu der Sprunghöhe, um den Fall $f = h + \frac{hh}{25}$ zu bekommen. So wäre bey dem Sprunge von 5 Schuh der Zusatz 1 Zoll; bey 10 Schuh Sprung, der Zusatz 4 Zoll; bey 15 Schuh. 9 Zoll; bey 20 Schuh 16 Zoll, u. s. f.

Der Ausdruck für den Fall wäre also auch $f = h + \frac{hh}{25.12} = h + \frac{hh}{300}$ Schuh; das ist, man bekommt den Fall für einen in Schuh gegebenen Sprung h; wenn man das Quadrat von diesem hh durch 300 dividirt. und diesen Quotienten $\frac{hh}{300}$ zu der Sprunghöhe h addirt. Hieraus, aus $f = h + \frac{h^2}{300}$, kann man auch leicht, durch den gegebenen Fall f, des springenden Wassers Höhe $h = \sqrt{(22500 + 300\,f)} - 150$ finden.

679. Wir wollen nach Gründen der Theorie, die Höhe h des in der Luft springenden Wassers, wenn der Fall f gegeben ist, suchen. Es sey (Fig. 273) des Falles Höhe $f =$ OB, und des Sprunges $GS = h$. Der obere Theil WS dieser Höhe h sey x, folglich der untere $WG = h - x$. Betrachten wir den Widerstand der Luft, da das Wasser im Anfange hinauf steigt oder springt. Wie es aus der Oeffnung G geht, findet es schon Widerstand von der Luft; und so im Hinaufsteigen immer fort, bis zum höchsten Punkte S. Im Hinaufsteigen nimmt des springenden Wassers Geschwindigkeit

stets ab; so daß, ohne Widerstand, die Geschwindigkeit in G zu der in W, wie $\sqrt{GS}$ zu $\sqrt{WS}$, oder überhaupt die Geschwindigkeit des springenden Wassers in was immer für einem Punkte W der Wasserlanze GS, wie die Quadratwurzel ihrer Höhe WS, über diesem Punkte W ist: weil ein in die Höhe geworfener Körper in jedem Punkte dieser Höhe beym Steigen eben die Geschwindigkeit hat; die er da im Rückfalle erlanget. Die Kraft des Wasserstrales in einem solchen Punkte W ist also der Schwere der darüber befindlichen Wassersäule WS gleich. Da nun alles eins ist, was den Widerstand betrifft, es mag sich ein Körper mit einer gewissen Geschwindigkeit im Fließigen, oder das Fließige sich mit dieser Geschwindigkeit gegen den Körper, welcher ruhet, bewegen: so muß dann hier der Luft Widerstand eben derselbe seyn, als wenn sie sich mit der Geschwindigkeit des springenden Wassers gegen dieses ruhende bewegte. Folglich ist ihre Kraft, ihr Widerstand, um so viel kleiner, als die Kraft des springenden Wassers; um soviel sie leichter oder dünner, als das Wasser ist. Drücket man also ihre Dünne oder Leichtigkeit durch n aus; und des springenden Wassers Kraft in G durch $GS = h$; und in W durch $WS = x$; so muß der Luft Widerstand in G, $= nh$; und in W, $= nx$ seyn. Suchen wir also den ganzen Widerstand der Luft, oder die Summe aller Widerstände, welche der Wasserstrahl leidet, indem er vom niedrigsten G bis zum höchsten Punkte S hinauf steigt. Die unendlich kleine Summe der Widerstände von einem unendlich kleinen Theile der Höhe GS, nämlich von dx, können wir durch nxdx ausdrücken. Folglich ist die gesuchte ganze Summe von x, $= \frac{nx^2}{2}$;

mithin von h, $= \frac{nh^2}{2}$; und von $h-x$, $= \frac{n}{2}(h^2-x^2)$.

Man könnte hier etwa schließen: Weil der Widerstand der Luft beym springenden Wasser, wie das Quadrat der Sprunghöhe h ist; so müsse diese Höhe nach dem Verhältnisse dieses Quadrats $h^2$ kleiner als der Fall f seyn; wie die mariottische Regel angiebt; oder es müsse $f = h + \frac{nh^2}{2}$ seyn. Allein es würde immer was anders in der Rechnung kommen, wenn man die Einheit verschieden, f, oder h, einmal in Schuh, einmal in Zoll, u. s. f. annähme; so daß wenn man gar kleine Theile annähme, die Verminderung $\frac{nh^2}{2}$ wohl größer als der ganze Fall

f wer-

f werden könnte. Denn setzen wir, $n = \frac{1}{1000}$, die Luft 1000 mal dünner als Wasser, und h in 2000 Theile getheilet; so ist $\frac{nh^2}{2} = \frac{4000000}{2000} = 2000 = h$: welches nicht seyn kann; indem, wenn $h = 1$ ist, $\frac{nh^2}{2} = \frac{1}{2000}$ von h ist.

Wir müssen vielmehr auch auf eine ähnliche Art, alle Kräfte des springenden Wassers, vorstellen, wie wir die Summe aller Widerstände der Luft vorgestellet haben. Es drücket nämlich $\frac{nh^2}{2} = \frac{n}{2}h \times h$ den Inhalt eines Dreyeckes aus, wovon h die Höhe und nh die Grundlinie ist. Darum müssen wir alle Kräfte des springenden Wassers zusammen, durch ein Dreyeck vorstellen, dessen Inhalt $\frac{h^2}{2}$, Höhe h und Grundline h ist. Setzen wir nach der 273 Fig. GO = GS; so wäre dieses letzte Dreyeck GOS; und das erste GFS, wenn $GF = nh = \frac{h}{1000}$; oder $\frac{h}{850}$ ist; da die Luft nicht gleich ist. Hernach setzen wir die Proportion $h^2 : h^2 - nh^2 = f : h$; so ist wenigstens mit Annäherung $h = f(1-n)$. Hiedurch würde nun freylich ein viel kleinerer Unterschied der Höhen des Sprunges und Falles gefunden, als beobachtet wird. Allein vielleicht rühret dieser von andern Ursachen, von den Leit- und Aufsatzröhren, davon wir schon die Rechnuug gesehen, und noch von andern her? Vielleicht kommen wir noch einmal auf diesen Gegenstand.

Wollen wir die Zeit z suchen, in welcher das Wasser, auf die Höhe h springt: so theilen wir diese Höhe h in zwey Theile, davon der obere x, und der untere $h-x$ ist. Die Geschwindigkeit des springenden Wassers bey der Höhe $h-x$, wird $\sqrt{((1-n)x)} = \sqrt{(mx)}$ seyn, wenn $m = 1-n$ ist; mithin $dz = \frac{dx}{\sqrt{(mx)}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{m}}$; und $z = 2\sqrt{\frac{x}{m}}$ dem Verhältniß nach; und in der Wirklichkeit $z = \sqrt{\frac{2x}{pm}}$ Sekunden (664); während welcher das Wasser durch x steiget; und $= \sqrt{\frac{2h}{pm}}$ Sekunden, in denen es durch h steiget; und $= \sqrt{\frac{2}{pm}}(h-x)$ Sek.

in welchen es durch h—x steiget. Nun ist $\frac{h}{m} = f$; folglich $\sqrt{\frac{2h}{pm}} = \sqrt{(\frac{2}{p} f)}$: welches die Zeit ist, in welcher das Wasser ungehindert durch f steiget oder fällt. Daher ist die Zeit, in welcher das durch die Luft gehinderte Wasser durch die Höhe h steiget oder fällt, derjenigen gleich, in welcher es ungehindert durch die Höhe des Falles f steigt oder fällt. Diese Uebereinstimmung könnte wohl eine Probe der guten Auflösung seyn.

680. Acht Versuche von der Höhe des vertikal springenden Wassers will ich aus Herrn Bossut Hydrodynamik hieher setzen: welche durch die 272. u. 273 Fig. vorgestellet werden. AC ist ein großes Wasserbehältniß, dessen Höhe ungefähr 12 Schuh, und dessen Grundfläche ein Quadrat ist, davon die Seite 3 Schuh hat. Die Wände bestanden aus 20 Linen dicken Bolen oder Brettern, und wurden durch gute Querriegel zusammen gehalten. Das ganze ruhete auf einem Gerüste von Zimmermannsarbeit. Hieran waren zwey blecherne Röhren OE, die am Ende E geschlossen, und auf der Seite des Wasserhalters offen waren. Eine jede hatte 6 Schuh in der Länge; die erste 3 Zoll 8 Linen, und die andere 9 bis 10 Linen im Durchmesser. Die Oeffnung in F hatte 2 Linen; die in G, 4; die in H, 8 Linen im Durchmesser. Die in MK war kegelförmig, davon die Höhe 5 Zoll 10 Linen, der Durchmesser der untern Grundfläche 9 Linen, und der obern 4 Linen war. Die zylindrische in IN hatte 5 Zoll 10 Linen in der Höhe, und 4 Linen im Durchmesser.

Das Wasser wurde in dem Behälter stets 11 Schuh hoch, über der Oberfläche OF der Röhre, erhalten: von welcher Fläche an auch die Höhe des Sprunges gerechnet wird.

1ster Versuch. Der gerad auffahrende Wasserstrahl, aus der Oeffnung F von 2 Linen im Durchmesser (Fig. 272) erhebt sich auf 10 Schuh 10 Linen. Er macht eine schöne Wassergarbe. Ein wenig geneigt, erhebt er sich auf 10 Schuh 4 Zoll 6 Linen.

2ter Versuch. Der aus der Oeffnung G von 4 Linen gerad auffahrende Strahl erhebt sich auf 10 Schuh 5 Zoll 10 Linen. Er verdickert sich in der Höhe nicht viel; und machet

ei-

eine schöne Garbe. Ein wenig geneigt, erhebt er sich auf 10 Schuh 7 Zoll 6 Linen.

3ter Versuch. Der aus der Oeffnung H von 8 Linen im Durchmesser gerad auffahrende Strahl erhebt sich auf 10 Schuh 6 Zoll 6 Linen. Bey allen Strahlen macht das Wasser kleine Sprünge, oder prällt ab. Hier sind sie merklicher, als in beiden vorigen Versuchen. Der Strahl verdickert sich hier in der Höhe viel. Etwas geneigt, erhebt er sich auf 10 Schuh 8 Zoll; und ist besser gestaltet, als da er gerad ist.

4ter Versuch. Der aus der konischen Röhre KM von 4 Linen im obern Durchmesser gerad auffahrende Strahl erhebt. sich auf 9 Schuh 6 Zoll 4 Linen. Er ist sehr schön: und etwas geneigt, erhebt er sich auf 9 Schuh 8 Zoll 6 Linen.

5ter Versuch. Der aus der zylindrischen Röhre IN von 4 Linen im Durchmesser gerad aufsteigende Strahl erhebt sich auf 7 Schuh 1 Zoll 6 Linen. Er ist sehr schön. Etwas geneigt, hebt er sich auf 7 Schuh 3 Zoll 6 Linen.

6ter Versuch. Der aus der Oeffnung F von 2 Linen im Durchmesser (Fig. 273) gerad aufsteigende Strahl hebt sich auf 9 Schuh 11 Zoll. Er ist schön

7ter Versuch. Der aus der Oeffnung G von 4 Linen im Durchmesser aufgehende Strahl steigt auf 9 Schuh 7 Zoll 10 Linen. Er verunstaltet sich sehr: und die Garbe ist oben sehr dick.

8ter Versuch. Der aus der Oeffnung H von 8 Linen im Durchmesser aufgehende Strahl steigt nicht über 7 Schuh 10 Zoll. Er zerstreuet oder breitet sich sehr aus; wird unterbrochen, oder springt nur absatzweise, das ist, er hört auf, und springt wieder.

Die drey letzten Versuche stimmen mit der Regel (678) überein; indem die Sprünge aus engen Oeffnungen höher sind, als die aus weiten. Bey den drey ersten Versuchen ist das Widerspiel: weil da die dickern Strahle höher steigen. Doch kann man nicht so gerad aussagen, daß diese wider die Regel sind; indem bey den dickern Strahlen H, G, die Leitröhre OH, OG kürzer als die OF bey dem dünnen ist. Man

müß-

müßte erst die ganze Rechnung machen. Es kann freylich wohl auch eine Ursache seyn, daß der dicke Strahl doch höher steigt; wenn auch jene Rechnung gleiches giebt: und diese kann wohl seine Stärke selbst seyn; die dem obern rückfallenden Wasser, und der Luft selbst mehr widersteht, und das Wasser mehr zusammenhält, als bey dünnen Strahlen geschieht. Daß aber das Wasser durch die Aufsatzröhren nicht so hoch, als ohne sie springet, das stimmt wieder mit der Regel überein. Wir wollen doch ein oder ein paar Versuche mit der Regel vergleichen.

Die Regel heißt: Es ist des springenden Wassers Höhe $x = \frac{hhDD}{ad^2 + D^2(c+h)}$: wo h die Höhe des Falles, D der Durchmesser der Wasserleitungsröhre, a ihre Länge, u. c die Länge der Aufsatzröhre, welche den Durchmesser d der Oeffnung hat.

Nach dem ersten Versuche ist also $h = 11'$, $D = 3'$, $8''' = 44'''$, $c = 0$, $d = 2'''$, und a will ich $= 5'$ annehmen weil es nicht bestimmt ist. Mithin ist die Sprunghöhe $x = \frac{58564}{5329} = 10' 11'' 10'''$; folglich von der im Versuche $10' 4'' 6'''$ um $7'' 4'''$ unterschieden: welches noch viel. Doch wäre sie von der mariotischen Bestimmung noch mehr unterschieden.

Nach dem 2ten Versuche wären alle Größen, bis auf d $= 4'''$ und a $= 4'$, wie vorher; mithin $x = \frac{14641}{1335} = 10' 11'' 7'''$; von der in dem Versuche $10' 7'' 6'''$, um $4'' 1'''$ unterschieden.

Nach dem 3ten Versuche, wären die Größen auch, wie im ersten, bis auf $d = 8'''$ und $a = 3'$. Daher ist $x = \frac{14641}{1343} = 10', 10'' 9'''$; von der im Versuche $10' 8''$, um $2'' 9'''$ unterschieden.

Man muß allerdings aus den Versuchen die größten Höhen nehmen, um sie mit den berechneten zu vergleichen; wenn auch der Strahl da nicht recht gerad gewesen. Es folgt vielmehr, daß wenn das rückfallende Wasser das springende nicht

hin-

hinderte, dieses bey dem geraden Sprunge noch höher steigen; und also der Unterschied zwischen der Erfahrung und Rechnung noch kleiner seyn würde. Also stimmt doch unsere Rechnung mit der Erfahrung ziemlich nahe überein. Und es wird der Unterschied auch noch dadurch gemindert, wenn man der Luft Widerstand mit in die Rechnung bringt. Denn die Höhe des Falles vom Wasser ist 11 Schuh = 1584 Linen. Diese durch $n = \frac{1}{800}$ multiplicirt, geben fast 2 Linen: um welche sich jener Unterschied noch mindert.

Indessen ist doch wahr, daß der Unterschied bey kleinen Oeffnungen größer als bey weiten ist. Und es kann wohl die Hauptursache davon seyn, daß der dünne Wasserstrahl von dem Widerstande der Luft mehr zerstreuet und gehindert wird, als der dicke. Es kann aber auch wohl eine Ursache mitseyn; und ja! unfehlbar ist sie eine mit, daß das Wasser einige Zähigkeit, eine Klebrigkeit, eine Zusammenhängung mit einander, nnd auch mit dem Rande der Oeffnung hat; zu derer Trennung auch einige Kraft erfodert wird; und wohl, nach Proportion der Menge des durchfließenden Wassers, eine größere bey kleinen, als bey weiten Oeffnungen. Wenigstens ist diese Klebrigkeit eine Ursache, die überhaupt den Grund zeiget, warum das Wasser nicht gar so hoch steigen könne, als die Rechnung weiset. So scheinet wenigstens unsere Rechnungsformel in diesem Falle, bis auf die Bestimmung der Klebrigkeit und zusammenhängung des Wassers unter sich und mit den Wänden der Gefäße und Rändern der Oeffnung, vollkommen zu seyn. Dieser von der Klebrigkeit verursachte Unterschied ist nun freylich wohl klein und nicht zu achten: da der beym dritten Versuche nicht 2″ 7‴ beträgt. Vielleicht läßt sich diese Klebrigkeit, oder die Kraft sie zu überwinden, durch mehrere Versuche noch bestimmen. Wollte man bey diesem dritten Versuche, die 7 Linen des Unterschieds, als den Unterschied der Höhe zwischen dem geraden und krummen Strahle annehmen: so zeigten die 2 Zoll schon die Kraft, welche da erfodert würde die Klebrigkeit zu überwinden; und diese verhielte sich zu der ganzen antreibenden Kraft des Wassers, wie 2 Zoll zu der ganzen Höhe des Falles von 11 Schuh, das ist, wie 2 zu 132, oder wie 1 zu 66; und sie wäre $\frac{1}{132}$ vom ganzen Triebe des Wassers, welcher dem Gewichte der Wassersäule gleich ist, die zur Grundfläche den Flächeninhalt der Oeffnung und zur Höhe die Höhe des Falles vom Wasser hat; also doch eine merkliche oder beträchtliche Größe. Zöge man diese Kraft der Klebrigkeit, oder diese 2 Zoll,

samt

samt den 7 Zoll Unterschied der Höhe zwischen dem geraden und krummen Wasserstrale, von dem Unterschiede bey den andern Versuchen ab: so sähe man die Wirkung der von dem Widerstande der Luft verursachten Zerstreuung des springenden Wassers, bey den zwey andern Versuchen. Also wäre diese Wirkung beym ersten Versuche 7″ 4‴ — 2‴ — 2″ — 7‴ = 4″ 7‴; und beym zweyten 4″ 1‴ — 2‴ — 2″ — 7‴ = 1″ 4‴. Bey diesen Rechnungen will ich es hier bewenden lassen. Was der Rückfall des Wassers wirket ist nicht mit in die Rechnung gekommen. Man kann aber diese Wirkung finden; wenn man die Höhe des gerad aufsteigenden mit der Höhe des etwas schief aufsteigenden Strales vergleichet. Der Unterschied dieser Höhen mehr 7 Linen ist die Wirkung vom Rückfalle des Wassers,

681. Wir wollen nun die Gestalt des schief aufsteigenden Strales, nach seiner Länge, als eine Line betrachtet, suchen. Es sey ABCDGEO (Fig. 274) das Wasserbehältniß; O eine kleine zylindrische Oeffnung, deren Achse verlängert OK ist; die Höhe des Wassers, oder seiner obern Horizontalfläche AB über dieser Oeffnung O sey OF. Folglich muß hier des springenden Wassers Richtung OK; und sein Fall FO seyn. Es ist also eben so viel als würde das Wasser in O mit einer Geschwindigkeit geworfen, die sich auf die Höhe OF bezieht; und $= G = \sqrt{(2ph)}$ ist. Daher muß die Gestalt der Länge des Wasserstrales OSH eine Parabel seyn (284 u. folg.); wenn man der Luft Widerstand nicht betrachtet.

682. Mit Beyseitsetzung des Widerstandes der Luft, findet man also leicht nach der Formel $4hx = y^2$ (290), worin obige Accente weggelassen, und hier (Fig. 274) $h = OF$, $x = ON = LM$, und $y = OL$ ist, jeden Punkt M des krummen Strales. Denn man darf nur $y = OL$ bekannt setzen; so hat man $x = LM = \frac{y^2}{4h}$.

Dieses gilt auch, wenn die Richtung des springenden Wassers horizontal, nämlich OL (Fig. 275) ist. Denn da ist $h = OB$, $y = OL = PM$, und $x = OP = LM$. Nehme ich hier $x = OP$ an; so finde ich $y = PM = 2\sqrt{(hx)}$.

683. Die horizontale Weite OH (Fig. 274) des springenden Wassers findet man nach dem Ausdrucke $x = 4h \sin a \cos a$ (293), worin $x = OH$, und der Winkel $a = KOH$, welchen die Richtung OK mit dem Horizonte OH machet. Ist dieser Winkel KOH von 45 Graden: so ist die Sprungweite OH dem gedoppelten Falle 2h, oder 2 OF gleich (296).

684. Machet man mit solchen Gefäßen, als die 274 u. 275 Figuren vorstellen, Versuche über den schiefen Sprung des Wassers: so wird man leicht entdecken; was für eine Abweichung der Krümme des Wasserstrahles von der Parabel ist. Eine Abweichung muß seyn: weil das Wasser beym vertikalen Sprunge, nicht die Höhe seines Falles erreichet, wie wir schon gesehen haben. Bossut setzet hier die zwey folgenden Versuche.

Ister. Wenn das Wasser durch die Oeffnung O von 6 Linen im Durchmesser, horizontal hinaus fährt; und des Behälters Höhe OB, 9 Schuh; und die vertikale Abscisse OP, 4 Schuh 3 Zoll, 7 Linen ist: so ist die horizontale Weite des Sprunges, oder Ordinate PM, 11 Schuh 3 Zoll 3 Linen. Nach der Parabel müßte diese $PM = 2\sqrt{(OB \cdot PO)} = 12' 5'' 3'''$ seyn. Daher ein großer Unterschied nämlich von 1 Schuh 2 Zoll.

2ter. Ist des Behälters Höhe OB, 4. Schuh, und die vertikale Abscisse OP, 4 Schuh 3 Zoll 7 Linen: so ist die horizontale Sprungweite oder Ordinate PM 8 Schuh 2 Zoll 8 Linen. Für die Parabel kömmt $PM = 8' 3'' 6'''$. So ist hier der Unterschied viel kleiner, als vorher, nur 10 Linen.

Es ist also die Abweichung der Krümme des Wasserstrahles von der Parabel, bey großer Höhe des Falles oder Geschwindigkeit, größer, als da diese klein sind.

685. Man weis, wie viel die Wasserkünste, springende Wasser, und andere zur Verschönerung der Gärten und Gebäude beytragen. Die Kunst sie zu verändern, und in verschiedenen Gestalten, welche dem Auge gefallen, vorzustellen, ist weit getrieben. Bald stellet das springende Wasser Garben und Säulen vor, welche auf sich selbst zurück fallen; bald eine Art von Bäumen, Erdschwämme, ausgebreitete Tücher, hole gläserne Zylinder, Staubregen, ꝛc. welches man durch verschiedene Aufsätze

sätze bewirket. Man findet hievon mehreres in Belidors Wasserbaukunst II. Tome.

686. Wie rinnt das Wasser aus den Gefäßen AD (Fig. 276 u. 277), welche unten im Boden CD senkrecht hangende Röhren MR oder in der Seite BD schiefliegende Röhren MQ haben? Kann man dabey die oben (672 u. 673) gegebenen Formeln auch anwenden? Ich sage, nein: indem das aus den Oeffnungen MN tretende Wasser weder in der schiefen noch senkrechten Röhre einen Widerstand findet; sondern durch die Schwere noch beschleuniget wird: es sey dann, daß die Schiefe zuklein oder die Röhren nach und nach so eng würden, daß die Reibung und der enge Raum mehr Hinderniß als die Schwere Beschleunigung machte. Sind die Röhren gleich weit und die Schiefe nicht zu gering: so kann wegen des Zusammenhanges des Wassers oder seiner Theilchen der Ausfluß aus den Gefäßen dadurch wohl noch beschleuniget, das ist, schneller werden, als wenn keine solche Röhren, sondern bloße Oeffnungen in den Wänden oder Böden wären. Das austretende Wasser wird nämlich durch die Beschleunigungskraft der Schwere zu größerer Geschwindigkeit gereizet; und wegen seiner Klebrigkeit oder seines Zusammenhanges mit dem nachfolgenden, zieht es dieses etwas mit sich, oder bringt ihm auch eine größere Geschwindigkeit bey. Dadurch wird nun freylich das erste auch wieder gehindert oder verzögert; so daß man beide Wirkungen wenigstens bey langen Röhren wohl ansehen kann, als wenn sie sich aufhöben, oder gar nicht wären, und das Wasser frey, ungehindert ausflösse. Doch will Bossut (Hydro. 507) bey sehr kurzen senkrechten Röhren MR (Fig. 276), die nur wenige Zoll lang sind, da des Gefäßes Höhe BD mehr Schuhe beträgt, beobachtet haben, daß bey verschiedenen solchen kleinen Röhren, die Menge des ausfließenden Wassers sich wie die Quadratwurzel der Höhe des Wassers über der Oeffnung der Röhre, z. B. wie $\sqrt{HO} : \sqrt{HQ}$, da eine Röhre HO, und die andere HQ ist, verhalte.

687. Wie ist nun die Kraft des aus solchen Oeffnungen QR (Fig. 276 u. 277) der Röhren strömenden Wassers?

Daran ist kein Zweifel, daß des strömenden Wassers Kraft bey der Oeffnung MN dem Drucke, der Schwere, der Wassersäule NH (Fig. 276), welcher als die Ursache, den Strom als seine Wirkung hervorbringt, gleich sey; folglich durch MN $\times$ MH, oder eh, wenn die Oeffnung MN $=$ e

und

und des Wassers Höhe darüber MH = h ist, vorgestellet werden könne. Bey Fig. 277 muß die Höhe h vom Mittelpunkte der Oeffnung bis zur Oberfläche des Wassers B gerechnet, oder $h = \frac{MB+NB}{2}$ gesetzet werden. Fällt nun das Wasser (Fig. 276) fort bis R zur Oeffnung der Röhre: so vermehrt sich seine Geschwindigkeit stets; so daß die in M zu der in Q, wie $\surd(HM)$ zu $\surd(HQ)$ ist: wodurch aber die Wassersäule RM immer dünner wird; so daß sich ihr Durchschnitt in Q, = e' zu dem in M, = e, wie $\surd MH$ zu $\surd QH$ verhalte; folglich $e' = e\frac{\surd MH}{\surd QH}$ sey. Da nun des Stromes Kraft in M, = e × MH = eh: so ist die in Q, = e' × QH = e'h' (wenn QH = h' ist) $= e\frac{\surd MH}{\surd QH} \times OH = e\surd\frac{h}{h'} \times h'$ $= e\surd(hh') = eH$, wenn H die mittlere Proportionale zwischen h und h', oder zwischen MH und HQ ist. Bey Fig. 277 ist $h' = \frac{LR+LQ}{2}$; wenn man auf das, was das Wasser durch die Reibung in der Röhre verliert, nicht acht hat.

Also ist dann des aus der Mündung QR der Röhre strömenden Wassers Kraft, eben da in QR, der Schwere einer Wassersäule gleich, welche zur Grundfläche, des Gefäßes Oeffnung MN = e, und zur Höhe H, die mittlere Proportionale zwischen der Höhe h des Wassers im Gefäße und seiner Höhe h' über der Röhre Mündung QR hat.

Hebt man die schiefe Röhre (Fig. 277) von R in S, daß sie horizontal, und endlich in R gar höher, als in M wird: so wird um analogisch zu schließen, die dasige Geschwindigkeit des Wassers in R, $= \surd h'$ immer kleiner; der dasige Durchschnitt des Wassers $e' = e\surd\frac{h}{h'}$ stets größer, welchem der Röhre ihrer wenigstens gleich seyn muß; und die dasige Kraft des Wassers $k = e\surd(hh')$ stets kleiner: so, daß beym horizontalen Stande der Röhre die Geschwindigkeit in RQ der in der Oeffnung MN, gleich, $= \surd h$; der Durchschnitt des Wassers in RQ, der Oeffnung MN gleich, e' = e; und die Kraft in RQ, der in der Oeffnung MN gleich, k = eh: und

beym vertikalen Stande der Röhre, die Geschwindigkeit und Kraft in RQ, = o; und der Durchschnitt $e' = e\sqrt{\frac{h}{o}}$, unendlich groß seyn müßte.

Hier sieht man, daß die Figur des gerad in die Höhe springenden Wassers, oder des gerad in die Höhe gehenden Wasserstrahles, die nämliche seyn sollte, welche der Wasserhalter (655) haben muß; wofern das Wasser mit der möglichen Geschwindigkeit aus der Oeffnung fahren solle, und sonst kein Widerstand von der Luft und dem Reiben, und der Klebrigkeit des Wassers selbst geschähe.

Hieraus könnte man etwa schließen: Also muß das Wasser (Fig. 269) aus der Mündung C wieder so hoch springen, als der Fall war, nämlich über C, auf die Höhe, welche EH gleich ist, da das Gefäß HF stets voll Wasser erhalten wird: welches doch wider den 672 §. ist. Ich sage selbst, man müßte so schließen: wenn aller Widerstand von der Luft, Reibung, Trägheit und Klebrigkeit des Wassers bey Seite gesetzt wird; und das Wasser aus dem Gefäße DK, durch die Oeffnung A in die leere Röhre ABC strömete. Denn dieser Wasserstrahl würde sich erst nach und nach verdünnern, so daß er beym niedrigsten Punkte B am dünnesten wäre; hernach aber würde er sich wieder nach und nach verdickern, so daß er in der Mündung C wieder so dick als in der ersten Oeffnung A, darüber noch dicker; und in seinem höchsten Punkte, fast unendlich, wenigstens so dick, als die Weite DH des Gefäßes DE, wäre. Wenn auch der Strahl an der untern Wand B der Röhre ABC anprället; so machete dieses doch keine Hinderniß: weil keine Reibung wäre, und die Bewegung durch die Krümmung so wenig gemindert würde, als da geschieht, wann ein Körper an einem Faden, oder ein Pendel, ohne allen Widerstand, den Bogen eines Zirkels oder einer andern krummen Line beschreibt. Ist aber die Röhre ABC voll Wasser, wie im cit. §. vorausgesetzet worden: so kann das Wasser aus dem Gefäße DE, durch die Oeffnung A, in die Röhre ABC, nicht hineinströmen, ohne das Wasser in dieser Röhre mit zu bewegen, oder vor sich fort zu stoßen. Darum kann es auch nicht mit der Geschwindigkeit, in die Röhre eintreten; wie es, ohne das Wasser in der Röhre, geschähe: welches schon, wie auch mit welcher Geschwindigkeit es eintrete, und sich darin bewege, im cit. §. erkläret worden; der also hiedurch noch bestätiget und erläutert wird.

Man

Man kann hiedurch auch begreifen, daß die Trägheit, Reibung und Klebrigkeit des Wassers, seinem Sprunge, nicht nur in der Röhre und Mündung der Wasserleitung; sondern auch auserhalb, in der Luft, und auch im luftleeren Raume, Hinderniſse setzen. Denn das in die Höhe springende Wasser, der auffahrende Wasserstrahl, die Wassersäule soll sich immer mehr ausbreiten, dicker werden: da widerstehen also, ohne die Luft, ohne die Reibung an der Luft, die Trägheit, und die Klebrigkeit des Wassers: welche also nur durch die verminderte Kraft und Höhe des springenden Wassers überwunden werden können.

688. Nachdem wir des gerad auffahrenden Wasserstrahles Dicke $e' = e\sqrt{\frac{h}{h'}}$ überall kennen (687): so können wir auch leicht seinen körperlichen Inhalt finden. Denn wenn $e' = y$, und $h' = x$: so ist ein unendlich kleiner Theil dieses Inhalts $ydx = e\sqrt{\frac{h}{x}}\,dx$; folglich der Inhalt des Theiles davon die Höhe $x$ ist, $\int e\sqrt{\frac{h}{x}}\,dx = 2e\sqrt{(hx)}$, und, wenn $x = h$ ist, das ist, der ganze Inhalt des aufsteigenden geraden Strahles, im Falle er die ganze Höhe $h$ erreichet, $= 2eh$; nämlich noch einmal so groß, als wenn der Strahl durchaus gleich dick, wie die Oeffnung, wäre.

Setzet man $x = \frac{1}{4}h$: so ist sein Inhalt von dieser Höhe, $= eh$, dem halben Inhalte des ganzen Strahles gleich: welchem auch der vom untern Theile von $\frac{3}{4}h$ der Höhe gleich ist. So kann man für $x$ einen Werth setzen; was man für einen will; und man findet leicht den dazu gehörigen Inhalt. Und der Inhalt des untern Theiles, von der Höhe $h - x$, ist $2e(h - \sqrt{(hx)})$.

689. Wir haben auch (687) gesehen, daß das Wasser in horizontalen gleichweiten Röhren sich durchgehends so schnell, als durch die Oeffnung ohne Röhre bewegen müßte; wenn keine Hinderniß von dem Widerstande der Luft, der Reibung und Klebrigkeit des Wassers verursachet würde. Wie groß wird aber diese Hinderniß wohl seyn? Hier ist kein anderes Mittel, selbige zu bestimmen, als Versuche. Ich will derowegen die Resultate von denen, welche Hr. Bossut (Hydr. 496)

gemacht daher setzen. Gefäße und Röhren waren beynahe so gestaltet, wie die 277 Fig. vorstellet, wenn man die Röhre MQ horizontal setzet. Er brauchete zweyerley Röhren von verschiedener Länge von 30 bis 180 Schuh, bey denen der eine Durchmesser 16 Linen, und der andere 2 Zoll hatte. Die Menge des durchgeflossenen Wassers ist für 1 Minute berechnet worden, ungeachtet in den Versuchen die Zeit bey einigen kürzer, und bey andern länger gewesen. Hier ist seine Tafel.

| Beständige Höhe des Wassers im Behälter über der Röhre Achse, in Schuhen. | Länge der Röhre vom Behälter an bis zur Mündung, in Schuhen. | Kubikzolle des durch die Röhre von 16 Lin. im Durchmesser in 1 Min. geflossenen Wassers. | Kubikzolle des durch die Röhre von 2 Zoll im Durchmesser in 1 Minute geflossenen Wassers. |
|---|---|---|---|
| 1 | 30 | 2778 | 7680 |
| 1 | 60 | 1957 | 5564 |
| 1 | 90 | 1587 | 4534 |
| 1 | 120 | 1351 | 3944 |
| 1 | 150 | 1178 | 3486 |
| 1 | 180 | 1052 | 3119 |
| 2 | 30 | 4066 | 11219 |
| 2 | 60 | 2888 | 8190 |
| 2 | 90 | 2352 | 6812 |
| 2 | 120 | 2011 | 5885 |
| 2 | 150 | 1762 | 5232 |
| 2 | 180 | 1583 | 4710 |

Suchen wir nach der Formel $q = ez\sqrt{(60,4.h)}$, (660) die Quantität des in 1 Minute ausfließenden Wassers: so ist sie bey der engen Röhre in den ersten sechs Fällen, wo die Höhe 1 Schuh ist, $q = \frac{11}{14}. \frac{16}{9}. 60. 7,77.12 = 11.8.20.$ 1,11.4 = 7814,4 Kubikzoll. Bossut findet nach dem Verhältniß der Zusammenziehung der Wasseradern (652 u. 677), 6330 Kubikzoll. Für die andern sechs Fälle der engen Röhre, wo die Höhe 2 Schuh war, findet er 8939 Kubikzoll. Bey der weiten Röhre, für die ersten 6 Fälle, wo die Höhe

he 1 Zoll war, findet er 14243 Kubikzoll; und für die andern, wo die Höhe 2 Zoll war, 20112 Kubikzoll.

Es könnte einem einfallen: vielleicht läßt sich diese Wasserverschwendung nach der Formel im 662 §. $q = ehz\sqrt{\frac{2p}{a+h}}$ berechnen. Es sind wohl die Wasserverschwendungen in diesen Versuchen beynah, wie umgekehrt die Quadratwurzel der Längen von den Röhren; doch kommt nach dieser Formel allzuwenig. Wollte man sie auch einrichten, und statt a einen gewissen Theil davon, ba setzen, den man durch einen Versuch, worin q bekannt wäre, finden könnte, und ich nach diesem Ausdrucke $q = nddz\sqrt{\left(\frac{2phh}{\frac{ab}{d}+h}\right)}$, worin d der Oeffnung Durchmesser, und ndd ihr Flächeninhalt oder $n = \frac{11}{14}$ ist, für der Röhre Länge $a = 120$ Schuh, nämlich $b = \frac{2ph^2n^2d^5z^2 - dhq^3}{aq^2} = 0{,}030$ gefunden habe: so trifft diese Formel $q = nddz\sqrt{\frac{2phhd}{a.0{,}03+hd}}$ mit einigen Versuchen beynahe überein. Denn ich finde darnach, wenn $a = 120$ Schuh, und $h = 2$ Schuh und $d = 16$ Linen ist, $q = 2011$, wie nach dem Versuche angegeben ist. Allein, wenn $d = 2$ Zoll, und das übrige, wie vorher ist: so finde ich darnach $q = 7241$ Kubikzoll: welches von der Zahl 5885 des Versuches zu viel abweichet.

Setzet man aber die Formel $q = nddzh\sqrt{\frac{2p}{0{,}27a+h}}$; so finde ich für das letzte Beyspiel, $q = 5998$ Kubikzoll: welches dem Versuche etwas näher kommt.

Für $a = 120$ Schuh, $h = 1$ Schuh und $d = 16$ Linen, giebt diese letzte Formel $q = 1352$ Kubikzoll. Um eine Annäherung zu haben, könnte man nach dieser wohl rechnen. Man sollte glauben, daß die Rechnung nach der ersten Formel näher kommen werde; weil sie von dem Unterschiede des Reibens in Betracht des verschiedenen Durchmessers der Röhre etwas enthält. Jedoch scheinet die letzte Formel den Vorzug zu haben.

Der Grund beider Formeln liegt in dem, daß man, wegen der Reibung des Wassers in den Röhren, wohl einen Theil desselben als träge anzusehen habe: weßwegen sie auf eine ähnliche Art, wie die im 672 §. entstanden. Wer hier eine zuverläßige Regel finden könnte; der würde der Wasserbaukunst und Leitung gewiß einen großen Dienst leisten. Wir wollen darum noch die Resultate der vortrefflichen Versuche von Herrn Couplet, des Herrn Bossut seinen beyfügen: damit diese ersetzen, was der Regel fehlt. Sie sind aus Bossuts Hydrodynamik 528 genommen. Es wird darin angezeiget, 1) der Röhre Durchmesser und Länge; 2) die Höhe des Falles, des Wasserhalters, oder drückenden Wassers; 3) das Verhältniß der wirklichen zu der ungehinderten Wasserverschwendung, die durch kleine Zusatzröhren geschieht (677)

| Durchmesser und Länge der Röhre. | Höhe des Falles. | Wasserverschwendung. |
|---|---|---|
| Bleyerne und gerade horizontale Röhre, derer Durchmesser 1 Zoll, und Länge 50 Schuh. | 0′ 4″ 0‴<br>1 0 0 | $\frac{1}{3'55}$<br>$\frac{1}{3'18}$ |
| Die nämliche Röhre, mit mehrern horizontalen Krümmungen. | 0 4 0<br>1 0 0 | $\frac{1}{3'78}$<br>$\frac{1}{3'43}$ |
| Die nämliche Röhre mit vertikalen Krümmen. | 1 4 0<br>1 0 0 | $\frac{1}{3'53}$<br>$\frac{1}{3'44}$ |
| Weißblecherne, gerade, horizontale Röhre von 16 Linen in Durchmesser, und 180 Schuh in der Länge. | 1 0 0<br>2 0 0 | $\frac{1}{6'61}$<br>$\frac{1}{3'64}$ |
| Eine andere solche Röhre von 2 Zoll im Durchmesser, u. derselben Länge. | 1 0 0<br>2 0 0 | $\frac{1}{4'57}$<br>$\frac{1}{4'27}$ |
| Weißblecherne gerade, 16 Lin. weite, 177 Schuh lange, und auf $\frac{24}{25}\frac{1}{24}$ ihrer Länge schiefliegende Röhre. | 20 11 0 | $\frac{1}{5}$ |
| Dieselbe Röhre, aber nur 118 Schuh lang. | 13 4 8 | $\frac{1}{4}$ |
| Dieselbe Röhre, aber nur 59 Schuh lang. | 6 8 4 | $\frac{1}{3'\frac{2}{8}\frac{1}{2}}$ |

Durch

| Durchmesser und Länge der Röhre. | Höhe des Falles. | Wasserverschwend. |
|---|---|---|
| Fast ganz eiserne Röhre, von 4 Zoll im Durchmesser, und ungefähr 297 Klafter in der Länge, mit mehrern horizontalen und vertikalen Krümmungen. | 0 9 0<br>1 9 0<br>2 7 0 | $\frac{1}{28}$<br>$\frac{1}{26,5}$<br>$\frac{1}{23,7}$ |
| Eine andere solche Röhre von 6 Zoll im Durchmesser und beynahe 285 Klaftern in der Länge. | 0 3 0<br>0 5 3 | $\frac{1}{12,35}$<br>$\frac{1}{11,37}$ |
| Eine theils steinerne, theils bleyerne Röhre, von 5 Zoll im Durchmesser, und beynahe 1170 Klaftern in der Länge, mit mehrern horizontalen und vertikalen Krümmungen. | 0 5 7<br>0 11 4<br>1 4 9<br>1 9 1<br>2 1 0 | $\frac{1}{23,10}$<br>$\frac{1}{20,98}$<br>$\frac{1}{19,49}$<br>$\frac{1}{18,78}$<br>$\frac{1}{18,48}$ |
| Eiserne Röhre, von 1 Schuh im Durchmesser, und ungefähr 600 Klaftern in der Länge mit mehrern horizontalen und vertikalen Krümmungen. | 12 1 3 | $\frac{1}{18,68}$ |
| Eine andere solche, 18 Zoll weite Röhre, von derselben Länge. | 12 1 3 | $\frac{1}{8,68}$ |
| Eine andere solche, 18 Zoll weite, und ungefähr 790 Klafter lange Röhre | 4 7 6 | $\frac{1}{10,11}$ |
| Eine andere solche, 1 Schuh weite und ungefähr 2340 Klaftern lange Röhre. | 20 3 0 | $\frac{1}{13,31}$ |

Diese Erfahrungen können in der Ausübung sehr nützlich seyn: indem man daraus sehen kann, was für eine Wasserverschwendung, in einem ähnlichen Falle der Wasserleitung beynahe geschehe. Man wird darnach, die Maße der Röhren, ihre Durchmesser und Weiten bey öffentlichen und andern Wasserleitungen, zu Vertheilung der Wasser, beynahe bestimmen

können; die gänzliche Genauigkeit aber, durch angebrachte Hähne oder Pippen bewerkstelligen.

690. Von dem Drucke des in Röhren bewegten Wassers gegen ihre Wände müssen wir etwas sagen.

Es sey die Röhre NE (Fig. 278) an den Wasserhalter AC horizontal angemacht; und der Behälter werde stets voll Wasser erhalten; und das Wasser bewege sich ohne allen Widerstand der Reibung und Luft durch die Röhre EN: so ist gewiß, daß das Wasser in der Röhre gar keinen Druck gegen die obere Fläche EM der Röhre mache; und gegen die untere NO, nur so viel, als seine Schwere, oder das Gewicht der Wassersäule beträgt, welche dem Produkte dieser gedrückten Fläche FN in die Höhe NO des darüber befindlichen Wassers gleich ist. Denn, da das Wasser sich horizontal, frey ohne allen Widerstand beweget: so läßt sich hier gar keine Kraft denken, wodurch es aufwärts, gegen EO drückete. Etwas anders wäre es; wenn der Röhre Mündung NO verstopft wäre: alsdann würde der Druck des Wassers gegen EO der Wassersäule EO × EB gleich seyn, wie genugsam bekannt ist.

Die Erfahrung weiset unsern hießigen Satz augenscheinlich. Denn Bossut (Hydr. 548) hatte diese Röhre EN 3 Schuh lang, und im Durchmesser 9 bis 10 Linen weit, und um ihre Achse am Behälter beweglich, und in der Mitte M ihrer Wand ein kleines Löchlein machen lassen; wodurch das Wasser, bey verstopfter Mündung NO, nach der Richtung des Löchleins, wie man nämlich die Röhre wendete, auf- seit- oder abwärts springen konnte. Hier beobachtete er, daß das Wasser durch das Löchlein M sprang, wie es die Regel erfodert, wann die Mündung NO verstopft war. War diese aber offen: so sprang, auch bey der Höhe EB des Wassers im Gefäße von 4 Schuh, gar nichts; es mochte das Löchlein auf- ab- oder seitwärts gerichtet werden. Nur tropfte es von seinem Rande; wann es abwärts gerichtet war.

Ist an der horizontalen Röhre EN (Fig. 279) die Mündung pn enger, als die Röhre, deren Weite PN = GF = EC ist; so schließet Bossut also: Die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre, z. B. in GF verhält sich zu der Geschwindigkeit desselben in der Mündung, wie das Quadrat des Durchmessers d der Mündung pn, oder vielmehr der zusammen-

ge-

gezogenen Wasserader qr zu dem Quadrate des Durchmessers D der Röhre, nämlich, wie $d^2$ zu $D^2$. Daher sey, wenn des Wassers Höhe über der Mündung pn in dem Gefäße AC, h; folglich die Geschwindigkeit in der Mündung wie $\sqrt{h}$ ist; die in der Röhre, in GF, $\frac{d^2\sqrt{h}}{D^2}$; und des Wassers Druck gegen die Wand der Röhre, $h - \frac{d^4h}{D^4}$; mithin die Geschwindigkeit, mit welcher hier das Wasser durch ein Löchlein in der Röhre Wand, bey G, springen würde, wie $\sqrt{(h - \frac{d^4h}{D^4})}$.

Diese Schlüsse scheinen nicht richtig zu seyn. Man sollte vielleicht, wie man insgemein pflegt, schließen: Daher ist die Geschwindigkeit des aus dem Löchlein, bey G, springenden Wassers $\sqrt{h} - \frac{d^2\sqrt{h}}{D^2}$; und der Druck gegen die Röhre Wand, wie $(\sqrt{h} - \frac{d^2\sqrt{h}}{D^2})^2 = h - \frac{2d^2h}{D^2} + \frac{d^4}{D^4}h$. Denn, wenn ich das Wasser in der Röhre ansehe, daß es sich mit der Geschwindigkeit $\frac{d^2}{D^2}\sqrt{h}$ bewege; und das im Gefäße, daß es bey H mit der Geschwindigkeit $\sqrt{h}$ in die Röhre hinein zu gehen strebe: so ist die respektive Geschwindigkeit $\sqrt{h} - \frac{d^2}{D^2}\sqrt{h}$; und der gegen das mit der Geschwindigkeit $\frac{d^2}{D^2}\sqrt{h}$ bewegte Wasser, folglich auch gegen die Wand der Röhre ausgeübte Druck $(\sqrt{h} - \frac{d^2}{D^2}\sqrt{h})^2$.

Allein es finden sich auch in diesen Schlüssen, Widersprüche. Denn ist nicht von dieser Geschwindigkeit $\sqrt{h}$ des durch die Mündung pn springenden Wassers die Ursache; weil der Druck des Wassers gegen diese Mündung, der Schwere der Wassersäule gleich ist, deren Höhe h ist? Wie kann nun die Fläche PN, die Grundfläche des Zylinders, der Röhre NE, von solcher Wassersäule gedrückt werden, ohne daß die ganze innere zylindrische Oberfläche von eben der Wassersäule gedrücket werde? Dieses wäre wider die Grundsätze der Hy-

drostatik. Daß in der 278 Fig. bey geöffneter Mündung NO, kein Druck in M geschieht, ist die Ursache, weil das Wasser, welches bewegt wird, seinen Druck und seine Geschwindigkeit schon im Eingange EF der Röhre empfängt. So müßte man auch bey Fig. 279 sagen, daß das durch die Mündung pn strömende Wasser schon beym Eingange EC in die Röhre EN seinen Druck und Geschwindigkeit empfange, und mit Beyseitsetzung der Reibung, wie in der vorigen Figur, in dieser Röhre CP sich ein Zylinder Wasser, dessen Grundfläche die Mündung pn oder pr ist, mit eben der Geschwindigkeit bewege, und das übrige Wasser in dieser Röhre CP ruhe, doch eben so gedrücket werde; so lang keine andere Oeffnung gemacht wird. Würde aber anderwärts, in G, oder wo immer, noch eine kleine Oeffnung gemacht: so müßte da ebenfalls ein zugehöriger Strom in der Röhre FE entstehen; wenn die Oeffnung nur nicht größer ist, als der Zylinder Wasser, der daher vorher in der Ruhe gewesen.

Freylich wird nun das mittlere Wasser durch die Röhre CP nicht so ungehindert durchgehen, ohne das andere um sich mit zu bewegen, wegen der Anhänglich- oder Klebrigkeit. Was ist zu schließen? 1) daß es bey dieser Klebrigkeit sich langsamer bewegen wird, als ohne selbe; gleichwie sich auch das Wasser durch die Röhre FO (Fig. 278) mit der Reibung oder Anhängung an der Röhre langsamer bewegt, als ohne selbe: 2) daß der Druck gegen die innere zylindrische Fläche der Röhre Fig. 279 nicht zu bestimmen, weil die Geschwindigkeit des berührenden Wassers nicht bekannt. Ohne Klebrigkeit ist er gewiß der Höhe h gemäß; und so kann man ihn auch annehmen; wenn die Mündung pn gegen der Röhre Weite PN klein ist.

Ist aber die Geschwindigkeit des Wassers, welches die innere zylindrische Oberfläche der Röhre berührt, in irgend einem Orte bekannt, $= \sqrt{h'}$, da die Höhe des ohne Bewegung allda drückenden Wassers h ist; so ist, bey dieser Geschwindigkeit $\sqrt{h'}$, der dasige Druck, vermög des gesagten, $(\sqrt{h} - \sqrt{h'})^2 = h - 2\sqrt{(hh')} + h'$: woraus, wenn man (Fig. 279) $\sqrt{h'} = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{h}$, wie Bossut annimmt, unser obiger Ausdruck $(\sqrt{h} - \frac{d^2}{D^2}\sqrt{h})^2 = h - 2\frac{d^2}{D^2}h + \frac{d^4}{D^4}h$ wird.

Die

Die Geschwindigkeit des aus dem allda in der Röhre Wand gemachten Löchlein springenden Wassers wäre demnach, $\sqrt{h} - \sqrt{h'}$; oder nach dem letzten Ausdrucke, $\sqrt{h} - \frac{d^2}{D^2}\sqrt{h}$.

Wäre nun die Menge des bey verschlossener Mündung pn aus diesem Löchlein G springenden Wassers Q; und des bey offener Mündung aus dem Löchlein springenden Wassers, q: so kann man die Proportion setzen: $Q : q = \sqrt{h} : \sqrt{h} - \sqrt{h'}$; oder $Q : q = \sqrt{h} : \sqrt{h} - \frac{d^2}{D^2}\sqrt{h}$. Daher $q = Q\left(1 - \sqrt{\frac{h'}{h}}\right)$, oder $q = Q\left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right) = Q\left(\frac{D^2 - d^2}{D^2}\right)$.

Doch stimmet diese Formel mit den Versuchen, die wir hernach sehen werden, nicht überein; wohl aber des Herrn Bossut seine. Also bleibt zu untersuchen, welche wahr sey.

Da die Erfahrung schon, für die vom Bossut spricht: so sollte man nur den Grund davon recht einsehen: warum er nämlich, wie gesagt, geschlossen, daß des Wassers Druck gegen der Röhre Wand, $h - \frac{d^4}{D^4} h$ sey.

Er weiset, meines Erachtens (Hydro. 550) diesen Schluß nicht deutlicher, als wir ihn oben gegeben. Giebt es kein Mittel, ihn einzusehen? Das, was mir eingefallen, will ich hieher setzen.

691. Wenn Wasser in einer Röhre sich langsamer beweget, als sein Fall erfodert: so kann man dieses durch die Analogie mittelst der 264 Fig. erklären. Es sey da des Falles, oder des im gefäße LG, gegen die Röhre TM drückenden Wassers Höhe $LT = h$; der Widerstand, den das Wasser bey seiner Bewegung durch die Röhre TM findet, die Schwere der Wassersäule, die zur Grundfläche der Röhre Mündung M, oder T, und zur Höhe $h''$, die Höhe ME des Wassers im Gefäße NA hat. Da ist also die Kraft der Bewegung des Wassers in der Röhre TM, $LT - ME = LE = h - h'' = h'$; und dieses Wassers Geschwindigkeit $= \sqrt{h'}$; und der Druck des Wassers gegen die innere Fläche der Röhre $h'' = h - h' = ME = LT - LE$; mithin des aus einem kleinen Seitenlöchlein der Röhre, zwischen T

und

und M, springenden Wassers Geschwindigkeit $= \sqrt{h''} = \sqrt{(EM)} = \sqrt{(h-h')} = \sqrt{(LT-LE)}$.

Wendet man dieses auf die 279 Fig. worin der Fall BH $=$ h, und die Geschwindigkeit des Wassers in der Mündung pn, $= \sqrt{h}$; folglich die in der Röhre EN, $= \frac{d^2}{D^2}\sqrt{h} = \sqrt{h'}$ gesetzet wird: so sieht man, daß der Druck des Wassers gegen die innere Fläche dieser Röhre EN $=$ h $- h' =$ h $- \frac{d^4}{D^4}$ h; mithin des aus einem Löchlein dieser Fläche springenden Wassers Geschwindigkeit $= \sqrt{(h-h')} = \sqrt{(h - \frac{d^4}{D^4} h)} = \sqrt{h''}$ seye

Wendet man dieses auf Wasserleitungen, wo das Wasser in den Röhren wegen seiner Reibung und Klebrigkeit, langsamer beweget wird, als die Höhe h des Falles oder drückenden Wassers erfodert: so kann man ebenfalls seine Geschwindigkeit durch $\sqrt{h'}$ ausdrücken; folglich des Wassers Druck gegen die innere Fläche der Röhre, durch $h-h'$, und des nahe am Behälter aus einem Seitenlöchlein springenden Wassers Geschwindigkeit durch $\sqrt{(h-h')}$ vorstellen.

692. Bossut hat hier bey seinen Wasserleitungen Versuche gemacht. Er machte nah am Behälter in der Seite der im Durchmesser sechzehnlinichten Röhre eine Oeffnung von ungefähr $3\frac{1}{4}$ Line im Durchmesser. Aus dieser sprangen, bey 1 Schuh Fall, wann die äuserste Mündung am Ende der Röhre verstopft war, in einer Minute 196 Kubikzoll Wasser; und bey 2 Schuh Fall, und denselben übrigen Umständen sprangen 274 Kubikzoll Wasser. Hierauf machte er Versuche und Rechnungen bey offenen Röhren, und fand folgende Resultate.

| Höhe des Falles in Schuhen. | Länge der Röhre in Schuhen. | Durch Rechnung gefundene Wasser verschwendung in Kubikzollen, für 1 Min. | Durch Versuche in 1 Min. gefundene Wasserverschwendung in Kubikzollen. |
|---|---|---|---|
| 1 | 30 | 176 | 171 |
| 1 | 60 | 186 | 186 |
| 1 | 90 | 190 | 190 |
| 1 | 120 | 191 | 191 |
| 1 | 150 | 192 | 193 |
| 1 | 180 | 193 | 194 |
| 2 | 30 | 244 | 240 |
| 2 | 60 | 259 | 256 |
| 2 | 90 | 264 | 261 |
| 2 | 120 | 267 | 264 |
| 2 | 150 | 268 | 265 |
| 2 | 180 | 269 | 266 |

Um die Rechnung zu machen, darf man nur folgende Proportion setzen: $Q : q = \sqrt{h} : \sqrt{(h - h')}$, worinn Q die beobachtete Wasserverschwendung von 196 oder 274 Kubikzoll; q die gesuchte; h die Höhe des Falles vom Wasser, oder $\sqrt{h}$ die dazu gehörige Geschwindigkeit, für welche man die ungehinderte Wasserverschwendung durch der Röhre Mündung, z. B. 8939 Kubikzoll nehmen kann; und $\sqrt{h'}$ die wirkliche Geschwindigkeit oder Verschwendung des durch die Röhre laufenden Wassers, z. B. 4066 Kubikzoll, bedeutet (689). Daher ist bey der Röhre geöffneter äuserster Mündung die durch die Seitenöffnung springende Quantität Wasser $q = Q\sqrt{\frac{h - h'}{h}}$;

im Beyspiele, wenn die Röhre 30 Schuh lang oder die ungehinderte Wasserverschwendung 8939, und die wirkliche 4066 Kubikzoll ist (689), $= 274\sqrt{\left(\frac{(8939)^2 - (4066)^2}{(8939)^2}\right)} = 274\sqrt{\left(\frac{79905721 - 16532356}{79905621}\right)} = 274 \cdot \frac{7960,7}{8939} = 244$ Kubikzoll: wie in der vorigen, aus Bossut (Hydro. 561) genommenen Tafel steht.

Bossut

Bossut hat (Hydr. 552), $\frac{d^4}{D^4} h$ statt $h'$ gesetzet, und die 279 Fig. zur Erklärung des Sprungs oder der Wasserverschwendung durch das Seitenlöchlein der Wasserleitung angewendet: welches aber nicht nöthig ist; wie aus dem vorigen erhellet.

693. Ich lasse (690) alle die Vernunftschlüsse; weil daraus noch manche nützliche Wahrheit wird können hergeleitet werden, wie wir noch sehen werden: sonst hätten einige davon können ausgestrichen werden; besonders da die letzte Formel $q = Q \sqrt{(\frac{h - h'}{h})}$ wahr, und die erste $q = Q (1 - \sqrt{\frac{h'}{h}})$ falsch seyn muß.

694. Durch die obige Analogie (691) läßt sich auch leicht eine Formel finden, nach der man den Widerstand $w = h''$ in Bossuts und Couplets Versuchen (689), oder die Hinderniß der Reibung des in dasigen Röhren bewegten Wassers finden kann. Denn nehmen wir die dasigen Größen h, h', h'', wovon die erste h die ganze Höhe des Falles bey diesen Wasserleitungen, und h' den Theil dieser Höhe, worauf sich die wirkliche geschwindigkeit des in den Röhren bewegten Wassers, und h'' den andern Theil derselben Höhe, welcher des Wassers gelittenen Widerstand oder Reibung in diesen Röhren ausdrücket, bedeutet; und setzen wir, die diesen Höhen h, h', h'' zugehörigen Geschwindigkeiten seyen g, g', g'': so hat man diese Proportion: $g^2 : g'^2 = h : h'$; oder weil $h' = h - h'' = h - w$ ist, diese $g^2 : g'^2 = h : h - h'' = h : h - w$; folglich $g^2 h - g^2 w = g'^2 h$; und $w = h (\frac{g^2 - g'^2}{g^2})$.

In dieser Formel $w = h (\frac{g^2 - g'^2}{g^2})$ darf man nur statt g' die bey den obigen (689) Versuchen durch die Röhren geflossene Quantität Wasser setzen; und statt g, die, welche ohne alle Hinderniß der Reibung und Klebrigkeit hätte durchfließen sollen, oder können: so kann man für Bossuts Versuche (689) leicht folgende Tafel berechnen.

| Beständige Höhe des Wassers im Behälter über der Röhre Achse in Schuhen; so = h. | Länge der Röhre vom Behälter an bis zur Mündung in Schuhen. | Widerstand der Reibung in der Röhre von 16 Lin. im Durchmesser, so w = h'' Schuh. | Widerstand der Reibung in der Röhre von 2 Zoll im Durchmesser, so w = h'' Schuh. |
|---|---|---|---|
| 1 | 30 | 0,8074 | 0,7093 |
| 1 | 60 | 0,9044 | 0,8420 |
| 1 | 90 | 0,9371 | 0,8987 |
| 1 | 120 | 0,9543 | 0,9233 |
| 1 | 150 | 0,9654 | 0,9401 |
| 1 | 180 | 0,9724 | 0,9520 |
| 2 | 30 | 1,5862 | 1,3776 |
| 2 | 60 | 1,7912 | 1,6683 |
| 2 | 90 | 1,8615 | 1,7705 |
| 2 | 120 | 1,8987 | 1,8288 |
| 2 | 150 | 1,9222 | 1,8647 |
| 2 | 180 | 1,9373 | 1,8904 |

Da sieht man deutlich, daß die Reibung bey engen Röhren größer als bey weiten ist; größer bey langen, als bey kurzen; größer bey großem als bey kleinem Falle; und beynahe wie der Fall, oder das Quadrat der Geschwindigkeit des Wassers, womit es sich ohne Reibung bewegen würde.

So kann man auch leicht Rechnungen über die Versuche von Couplet (689) und andere anstellen.

Man könnte auch nach der Proportion $g^2 : g'^2 = h : h'$ die Höhe $h' = h\frac{g'^2}{g^2}$, worauf sich die wirkliche Geschwindigkeit des bewegten Wassers bezieht, suchen; und so dann diese gefundene h' von der bekannten h des Falles abziehen: so hätte man ebenfalls die Höhe h'' des Widerstands der Reibung, wie klar ist.

Su-

Suchen wir diese Höhe h′ in dem Coupletischen Versuche, worin die eiserne Röhre 1 Schuh im Durchmesser, und 600 Klaftern lang, und h = 12′ 1″ 3‴ war: so ist beynahe h′ = 17 Linen; folglich h″ = 12′ — 2‴.

In seinem letzten Versuche, wo die Röhre 2340 Klaftern lang war, wäre h′ = $\frac{147}{374}$ Zoll = 4, 4 Line; folglich h″ = 20′ — 1‴, 4.

695. Will man die Skale oder Stufenline der Geschwindigkeiten und Widerstände des Reibens des in Röhren geleiteten Wassers, z. B. nach Bossuts Versuchen mit der engen Röhre von 16 Linen im Durchmesser, verzeichnen; so darf man nur eine horizontale Line AB (Fig. 280) nach belieben ziehen, welche die Länge der Röhren vorstellet; und hierauf die Senkrechte AC, welche des Falles, oder des Wassers Höhe im Behälter bedeutet; alsdann die Länge der Röhre für jeden Versuch z. B. AD = 30, AF = 60, AH = 90, AK = 120, AM = 150, AO = 180 Schuh besonders anmerken: und hierauf die senkrechten Linen, DR, FS, HT, KV, MW, OX, alle = AC machen; und die Höhe der Widerstände des Reibens, z. B. wenn der Fall AC = 1 ist, DE = 0, 8, FG = 0, 9, HI = 0, 94, KL = 0, 95, MN = 0, 96, OP = 0,97, mittelst eines Proportionalzirkels auftragen; und durch diese Punkte A, E, G, I, L, N, P eine krumme Line ziehen: so ist diese die Stufenline, worin DE, FG, HI, ꝛc. die Widerstände des Reibens, und AC, ER, GS, IT, LV, NW, PX die Quadrete der Geschwindigkeiten, des in diesen Röhren bewegten Wassers bedeutet.

Es ist hier zwar die Höhe AC des Falles, und die Länge der Röhren AD, AF, ꝛc. wegen Mangel des Raumes nicht nach Proportion gezeichnet; doch aber die Höhe des Falles AC, und der Widerstände DE, FG, HI, ꝛc. und man muß sich vorstellen, als sähe man die Figur schief, oder sie seye ein schiefer Entwurf: und man kann dadurch immer seiner Einbildungskraft zu Hülfe kommen; und sehen, wie in kurzen Röhren der Widerstand geschwind zunimmt; und in langen, nach Proportion viel weniger, jedoch immer zu nimmt, und dabey doch auch noch ein Fall für die Geschwindigkeit, RE, SG, TI, ꝛc. bleibt; der zwar stets abnimmt, aber nicht null wer-

werden kaun, auser bey den gar dünnen, oder Haarröhren, wo das Wasser ganz, sich an die Röhren anhängt, und von sich selbst nicht ausfließt. Also muß CRQ die Asymptote dieser krummen Line AEP seyn: welche die krumme nur nach einer Distanz AB oder Länge der Röhre, gegen welche des Falles Höhe AC für nichts zu rechnen, berühret; wo des Wassers Geschwindigkeit null oder ebenfalls für nichts zu rechnen.

Nehmen wir z. B. Couplets Versuch mit der längsten Röhre von 2340 Klaftern und dem Falle von 20′ 3″; wobey das Quadrat der Geschwindigkeit, oder die Höhe, auf welche sich die wirkliche Geschwindigkeit bezieht, nur 4,4 Line ist (694): was würde da bey dieser Länge der Röhre, und der Höhe des Falles von 1 Schuh nach abgezogener Höhe des Widerstandes wohl noch für ein Fall, oder Geschwindigkeit seyn?

Berechnen wir die Höhen der wirklichen Geschwindigkeiten, RE, SG, TI, ꝛc. in unserer Stufenline: so finden wir (694), 1) wenn der Fall CA = 1′ ist, RE = 0,1926, SG = 0,0956, FI = 0,0629, VL = 0,0457, WN = 0,0346, XP = 0,0276;

2) Wenn der Fall CA = 2′ ist, RE = 0,4138, SG = 0,2088, FI = 0,1385, VL = 0,1013, WN = 0,0778, XP = 0,0627;

3) Wenn der Röhre Durchmesser 2 Zoll, und der Fall CA = 1 Schuh ist, RE = 0,2907, SG = 0,1580, FI = 0,1013, VL = 0,0767, WN = 0,0599, XP = 0,0480;

4) Wenn der Fall CA = 2 Schuh ist, RE = 0.6224, SG = 0,3317, FI = 0,2295, VL = 0,1712, WN = 0,1353, XP = 0,1096.

Hieraus sieht man, daß die Höhen h′ auf welche sich die wirklichen Geschwindigkeiten des in Röhren geleiteten Wassers beziehen, sich 1) beynahe, wie umgekehrt die Längen l der Röhren; $\frac{1}{l}$ 2) wie die Höhen h des Wassers im Behälter; und 3) wie der Röhren Durch-

messer d verhalten: doch so, daß sie bey den langen und den weiten Röhren, und dem kleinen Falle etwas kleiner ist, als dieß Verhältniß giebt.

Man darf nur die Vergleichung der vorigen Zahlen machen; so wird man diese Regel finden. Ungeachtet sie nur eine kleine Annäherung ist; so muß sie doch den Liebhaber dieser Wissenschaft freuen, wenn er betrachtet, daß er hierin sonst gar keine hat.

Machen wir die Anwendung dieser Regel bey der vorigen Frage von Couplets Versuche, und der Röhre von 16 Linen im Durchmesser, wenn sie bey 1 Schuh Fall so lang als die in diesem Versuche wäre. Drücken wir die Regel algebraisch aus; so ist $H' : h' = lHD : Lhd$. Da wir nun $h'$ suchen, und $l = L$ annehmen: so ist $h' = \frac{hdH'}{HD} = \frac{1.16.4,4}{2916.1728} = \frac{11}{787320}$ Line beynahe. Dadurch entstünde beynahe eine Geschwindigkeit von $\frac{1}{1708}$ Schuh oder $\frac{1}{12}$ Line in einer Sekunde. Allein so was betrachtet man nicht, ist nichts; in der Ausübung.

696. Nun können wir auch die Bewegung des Wassers in Kanälen oder Rinnen betrachten, welche entstehen, wenn man die Röhren nach ihrer ganzen Länge oberhalb öffnet. Das erste, was wir da betrachten wollen, soll der Versuch seyn, welchen Bossut (Hydr. 583) beschreibt. Diese Bewegung, spricht er, hat was besonderes, welches verdient angemerkt zu werden. Wenn man das Schutzbrett vor der Oeffnung EC (Fig. 281) aufhebt: so schießt das Wasser nach der Länge CF des Kanals hinaus; und hat anfangs keine andere Richtung als diese. Da es aber im Fortgehen Widerstand findet; so schwillt es auf und nimmt diese Gestalt EMG an. Hernach sinkt es wieder, vermög seiner eigenen Schwere, vom höchsten Punkte M herab; und ein Theil davon kommt auf die Seite des Wasserhalters, nach der Richtung MN zurück. Also sind auf der Seite CM des Kanals zwey entgegengesetzte Ströme; einer, der vom untern Wasser gebildet wird, und nach der Richtung CF fortgeht; und der andere, welcher von dem obern Wasser gebildet wird, und nach der Richtung MN zurück kömmt. Dieser ist anfangs sehr sichtbar. Er endiget sich im

Punk-

Punkte N, ungefähr 12 Schuh von der Mündung EC. Nach und nach mindert er sich; ob er schon fortdauert: und des Wassers Oberfläche nimmt die Gestalt ERG an, wovon R der höchste Punkte über dem Boden der Rinne ist. Das Wasser, welches alle Augenblicke aus dem Behälter kommt, stößt stets, in NO, die Masse NOFG; und vermischt sich mit ihr: und diese so stets erneuerte Masse behält dieselbe Figur.

Die Ströme, wovon wir gesprochen, sind ein sichtbares Beyspiel von denen, welche sich in Flüssen und Meeren bilden müssen, so oft das Wasser Hinderniße antrifft. Man sieht, daß in diesem Falle, das Wasser anfangs aufschwellen muß: und da hernach sein Gewicht es sich auszubreiten nöthiget; so entstehen daraus Ströme, welche allerley Richtungen haben können.

697. Obschon, wie wir erst gesagt haben, die Geschwindigkeit des Wassers eine beträchtliche Verzögerung leidet, die um so viel beträchtlicher, als der Canal länger ist: so wird doch die Wasserverschwendung dadurch nicht gemindert. Der beständige Ausfluß aus der Mündung wird durch das Wasser im Kanale nicht verzögert: weil das Wasser völlige Freyheit hat aus der Mündung heraus zu fahren. Bossut hat dieses auch beobachtet; und am Ende F des Kanals nach seiner Meinung eben so viel Wasser aufgefangen, als wann gar kein Kanal am Behälter war. Also ist dann ein merkwürdiger Unterschied zwischen der Bewegung des Wassers in einer Röhre, die um und um geschlossen, und der Bewegung in einem Kanale, der oben offen ist. Im ersten Falle vermindert sich die Wasserverschwendung desto mehr je länger die Röhre ist: statt dessen im andern Falle sie stets einerley ist, der Kanal mag was immer für eine Länge haben.

698. Doch scheint mir, daß auch durch einen Kanal wenn er lang ist, der Ausfluß des Wassers aus dem Behälter gemindert werden müsse; wenn er nämlich so lang ist, daß das Wasser in der Höhe zurück bis an den Kanal läuft, und da höher als die Oeffnung stehen bleibt: welches allerdings möglich ist; weil das Wasser desto mehr Widerstand findet, je länger der Kanal ist: und das erste, oder vordere Wasser in Bossuts Versuchen selbst desto langsamer gegangen, je weiter es sich von der Mündung des Gefäßes entfernt. Denn sein Kanal war nur 105 Schuh lang, 5 Zoll breit

und 8 bis 9 Zoll hoch. So breit war auch die Oeffnung im Behälter, und ihre Höhe konnte nach Belieben auf 1 oder $\frac{1}{2}$ Zoll gerichtet werden. Die Länge theilete er in 5 gleiche Theile, deren jeder 21 Schuh hatte. An dem Ende eines jeden brachte er eine kleine Windmühle an, wie die Kinder zum Spielen haben; und bemerkte die Sekunden die verflossen, bis das Wasser nach seinem Austritt aus der Mündung, jede solche Mühle in Bewegung setzte. Da fand er nach seinem 5ten Versuche, welcher mir der genaueste zu seyn scheint, wobey das Wasser im Behälter 7 Schuh 8 Zoll über des Kanals Boden hoch stand, und die Oeffnung 1 Zoll hoch war, folgende Sekunden, 2, 5, 9, 14, 20. Die erste Mühle nämlich fieng an, sich nach 2, die andere nach 5, die dritte nach 9 Sekunden u. s. f. zu bewegen. Also durchlief das Wasser von der Mündung an, den ersten Theil der Röhre, oder 21 Schuh, in 2 Sekunden; 2 Theile der Röhre, oder 42 Schuh, in 5 Sekunden; u. s. f. Woraus offenbar ist, daß es sich stets langsamer bewegte.

War die Höhe des Wassers im Behälter größer; so waren diese Zeiten kleiner: und so umgekehrt. War die Oeffnung kleiner; so waren diese Zeiten größer.

699. Daher ist auch eine Aehnlichkeit zwischen den Wasserleitungen in Röhren und Rinnen, besonders wenn sich die Gleichförmigkeit der Bewegung herstellet: und alsdann kann allerdings die obige Regel (695) von den Röhren, auch bey den Rinnen angewandt werden.

Man kann nämlich auch hier sagen, daß die Höhen, h', auf welche sich die wirklichen Geschwindigkeiten des in Rinnen geleiteten Wassers beziehen, sich 1) beynahe, wie umgekehrt die Längen l der Rinnen $\frac{1}{l}$; 2) wie die Höhen h des Wassers im Behälter; und 3) wie der Röhren oder des geleiteten Wassers gleichnamige Seiten d verhalten: doch so, daß sie bey den langen und den weiten Rinnen, und dem kleinen Falle etwas kleiner ist, als dieß Verhältniß angiebt. Diese Regel wird algebraisch also ausgedrückt: $H' : h' = lHD : Lhd = \frac{HD}{L} : \frac{hd}{l}$.

Hier-

Hieraus wollen wir noch einige Folgen ziehen.

1) Wenn die auf der Länge der Rinnen oder des darin geleiteten Wassers senkrecht gemachten Durchschnitte nicht ähnlich sind: so muß D : d das Verhältniß der Höhen dieser Durchschnitte oder des in den Rinnen befindlichen Wassers ausdrücken. Es versteht sich, daß sie nicht zueng, wie Harröhren seyn dürfen.

2) Wenn kein Behälter ist, worin sich das drückende Wasser befindet; sondern statt dessen das höhere Wasser in der Rinne dienen muß: so ist H : h = D : d; mithin H′ : h′ = 1HH : Lhh = 1DD : Ldd.

3) Sind zugleich die Längen der Rinnen gleich, l = L: so ist H′ : h′ = $H^2$ : $h^2$; oder die wirklichen Geschwindigkeiten des in diesen Rinnen geleiteten Wassers, wie die Höhen des Wassers in den Rinnen, H : h.

4) Ist zugleich die Weite der Rinnen einerley: so ist die Quantität des dadurch rinnenden Wassers, wie das Quadrat der Höhe desselben in den Rinnen, Q : q = $H^2$ : $h^2$.

Dieses letzte stimmet mit der Beobachtung eines berühmten italienischen Schriftstellers überein; wie auch mit den obigen Formeln (672), und mit der $q = nddzh\sqrt{\frac{2p}{0,27a+h}}$, (689), wenn h gegen a für nichts zu achten.

700. Da sich in dieser Materie so genau nichts bestimmen läßt: so kann man diese Formeln (699) auch bey einer kleinen Abhängigkeit oder Schiefe der Rinnen anwenden; und bey einer größern Schiefe, mit Beyseitsetznng der Reibung, sich nach dem 687 §. richten. Doch will Bossut (Hydr. 646) aus seinen Versuchen schließen, daß bey der Abhängigkeit der Rinne, welche der zehnte Theil ihrer Länge ist, die Kraft des strömenden Wassers, wegen Reiben, am Ende der Rinne nur derjenigen gleich sey, welche es, ohne Röhre und Rinne, bey der Oeffnung des Behälters hat.

701. Ganz klar ist es daher, daß, wenn das Wasser durch Röhren oder Rinnen, von einem höhern an einen niedrigen Ort gerad geleitet wird, es sich, vermög der wenigern Reibung, geschwinder beweget, als da geschieht, wenn es durch Umwege, durch krumme Kanäle geleitet wird. Ohne Reibung müßte unten, am niedrigsten Orte, die Geschwindigkeit freylich gleich seyn.

702. Was wir von der Bewegung des Wassers in Kanälen gesagt haben, das läßt sich leicht auf die Bewegung desselben in Bächen, kleinen und großen Flüssen anwenden. Quellen sind an Bergen, Anhöhen und in Thälern. Aus diesen rinnt das Wasser durch abhängige kleine Gräben, wie durch Kanäle an niedrigere Oerter. Stößt dieses Bächlein in seinem Gange auf kleine Erhöhungen; so schwillt es an, und erhebt sich bis es diese überstiegen. Darauf rollt es hinüber, wie über eine schiefe Fläche. Treffen nun mehr solche Bächlein oder Quellwasser zusammen: so entstehen daraus größere Bäche: die in ihren abhängigen Gräben oder Kanälen stets fort fließen. Abhängigkeit und Erhöhung des Wassers in den Gräben sind also die Ursache des in Bächen und Flüssen bewegten Wassers. Da aber diese Ursachen meistens nicht umständlich genug bekannt sind; folglich zum voraus dadurch von der Bewegung des Wassers in Flüssen sich nichts gewisses bestimmen läßt: so müssen wir die schon bekannten Instrumente beschreiben, wodurch sich die Kraft und Geschwindigkeit dieser Ströme in jedem Orte, genauer angeben lassen.

703. Aufm Wasser **schwimmende Körper** nehmen gar bald seine Geschwindigkeit an. Man kann also die Geschwindigkeit eines Stromes messen; wenn man einen kleinen Körper darauf legt, der sich fast ganz eintauchet, und die Zeit bemerket, die er anwendet einen gegebenen Raum zu durchlaufen. Dieser Körper muß darum fast ganz untergetauchet seyn, damit er dem Win-

de

de oder der Bewegung der Luft nicht ausgesetzet sey. Mariotte hat diese Art, des Stromes Geschwindigkeit zu messen, vielfältig gebrauchet.

Da dieser nämliche Autor beobachtet, daß das Flußwasser an der Oberfläche und andern Orten nicht gleich geschwind gehe, und beym Grunde durch Steine, Gras und andere Ungleichheiten verzögert werde: so bestimmete er in einem kleinen Flusse diese verschiedenen Geschwindigkeiten. Zu diesem Ende nahm er zwey Kugeln von Wachs, die an einem schuhlangen Faden gebunden waren. Eine davon war inwendig mit kleinen Steinen beschwert. Damit sie etwas schwerer als das Wasser wäre, und mit Anspannung des Fadens die leichtere etwas mehr eintauchte, als es geschah, da sie allein war. Dadurch war dieser ihr oberer Theil dem Wasser gleich; und sie dem Winde nicht so ausgesetzt. Er beobachtete allezeit, daß die untere Kugel zurück blieb, besonders wo Gras im Grunde des Flusses war, bey dem die untere Kugel vorbey strich: denn der Fluß hatte ungefähr nur 3 Schuh Tiefe. Legte man aber diese Kugeln an einen Ort, wo das Wasser einige Hinderniß antraf; sich etwas erhob; und hernach einen schnellern Lauf nahm, wie man bey den Brücken beobachtet: so kam die untere Kugel der obern bevor. Dieß zeigt an, daß allda das mittlere Wasser geschwinder gieng, als das an der Oberfläche.

Durch dieses Beyspiel sieht man, daß die Geschwindigkeit von der Oberfläche bis zum Grunde hin, sich nach den Umständen vermehre und vermindere. Natürlicher Weise sollte die Geschwindigkeit von der Oberfläche an bis zum Grunde hin stets zunehmen, weil der Fall stets größer wird: aber es kann geschehen, daß das Wasser durch Hindernisse mehr verzögert, als durch Vermehrung des Falles beschleuniget wird

704. Man nimmt ein **kleines Rad** von 15 bis 18 Zoll im Durchmesser, das sehr leicht, und auf sehr dünnen Zapfen vollkommen beweglich ist, die sich, um größerer Leichtigkeit willen, noch auf Rollen drehen können; und machet daran 15 bis 18 kleine leichte Schaufeln von weißem Bleche. Diese Maschine stellt man in den Strom, und zählet die Umläufe, die sie in einer gewissen Zeit machet. Da man den mittlern Halbmesser des Rades, das ist, die Weite des Punktes, worin man den Stoß des Wassers beysammen gedenken kann, vom Mittelpunkte des Rades kennet: so kennet man auch die Größe seines Umfanges; und folglich den Raum für die gegebene Zeit, oder die Geschwindigkeit des Stromes.

Diese Methode hat die Unvollkommenheit, daß sie nur die Geschwindigkeit an der Oberfläche geben kann, und daß der Umlauf des Rades durch der Luft Widerstand etwas gehemmet wird. Doch ist sie sehr einfach, und kann bisweilen mit Nutzen gebrauchet werden. Bossut hat sich derselben bedienet.

705. Um die Quantität Wasser eines Stromes zu messen, schlägt **Guglielmini** in seiner Abhandlung aquarum fluentium mensura lib. 4, vor, man soll den Strom zwischen zwey senkrechte parallele Mauern einschließen, den Grund recht gleich oder eben machen, und den Durchgang des Wassers durch ein senkrecht bewegliches Schußbrett etwas sperren, so daß es durch eine rechtwinklichte Oeffnung zwischen dem Grunde, den zwey Mauern und dem Schußbrette, durchlaufen muß. Diese Oeffnung heißet der **Regulator (des Guglielmini)**. Die Oberfläche des Wassers vor dem Schußbrette muß merklich still stehen. Die Menge des durchlaufenden Wassers findet man nach dem 660 §.

Es ist offenbar, daß diese Weise, die Quantität des durchlaufenden Wassers zu bestimmen, nur bey kleinen Flüssen thunlich sey.

706. Die **gebogenen Röhre** des Herrn **Pitot**, davon er (**Mem. de l'Acad. an. 1732**) die Beschreibung giebt, ist eine gläserne in C gekrümmte Röhre ACB (Fig. 282), die man senkrecht in den Strom tauchet, und die Oeffnung A gegen den Strom hält. Die Höhe CM, auf welche sich das Wasser in der Röhre hebt, ist diejenige, auf welche sich die Geschwindigkeit des Stromes in A bezieht, sagt Bossut (Hydro. 657). Allein Belidor, welcher den untern Theil der Röhre CA konisch, als einen Trichter, vorstellet, spricht (Hydraul. I. 614), daß die Höhe MO des Wassers in der Röhre über des Flusses Oberfläche O diejenige sey, welche des Flusses Geschwindigkeit zukommt: weil das Wasser auch in einer geraden Röhre, in die der Strom nicht wirket, so hoch als der Fluß, oder CO steht; folglich bloß OM die Höhe der Wassersäule ist, mit welcher der Strom im Gleichgewichte steht. Bossut meint, daß die ganze Wassersäule CM, vom Strome gehoben oder erhalten werde. Allein dieß ist nicht: weil auch ohne Strom das Wasser in der Röhre so hoch stehen würde, als sie darin eingetaucht wird, nämlich als OC. Versuche haben mich hievon noch mehr überzeugt.

Ich habe nämlich einen solchen Strommesser OH (Fig. 283) als Belidor vorstellet, an die Oeffnung G einer Flasche GF, die voll Wasser war, senkrecht gehalten; und beobachtet, daß, sobald das Wasser in die konische Röhre ML geschossen, es auch in der senkrechten LH so hoch gestiegen, als es in der Flasche gestanden; so daß die zwey obere Flächen HN und EF sehr nah in einer Horizontalline HF waren; und auch beym Sinken des Wassers in der Flasche stets in einer solchen geblieben; auch damals, wann schon viel Was-

ser in dem Gefäße ABCD war, worin die Flasche gestanden, z. B. wann hierin des Wassers Oberfläche KI war.

Dieß letzte zeigt klar, daß sich des Stromes Geschwindigkeit in G und MO auf die Höhe HI, und nicht auf HL beziehe: weil sie sich hier auf FK = HI bezieht (666).

Nichts einfacheres und bequemeres, die Kraft des Stromes zu messen als dieses Instrument. Man bindet die Röhre an ein prismatisches dreyeckiges Holz oder Messing mit kleinen Abtheilungen, wodurch man des Wassers Höhe gleich ohne große Mühe erkennt. Es hat freylich auch, noch Unbequemlichkeiten, z. B. das Schwanken des Wassers in der Röhre: welches diese Kenntniß etwas erschwert. Allein man darf da nur auf die größte und kleinste Höhe dieses bewegten Wassers sehen, und davon das Mittel nehmen.

Hat man nun die Kraft des Stromes bekannt; so kann man auch leicht seine Geschwindigkeit finden (656); auch in jedem Orte, in der Höhe und in der Tiefe; auch wohl die Geschwindigkeit eines auf dem Meere bewegten Schiffes, ꝛc. Wir werden insonderheit dieses Instrument den **Strommesser** nennen: weil so auf die leichteste Art des Stromes Kraft und Geschwindigkeit dadurch gefunden werden kann.

707. Noch ein bequemes Instrument den Strom zu messen, ist der **Quadrant** oder **Viertelzirkel** ABC (Fig. 284) mit zwey Kugeln P und M an Fäden PC, MC, die im Mittelpunkte C befestiget sind. Eine P von den Kugeln dienet nur als ein Gewicht, um den Radius CA des Quadranten senkrecht zu stellen, und kann klein seyn. Die andere M, die an einem längern

Fa-

Faden angemacht, und größer seyn kann, und schwerer als das Wasser seyn muß, wird ins Wasser gelassen, und durch den Strom fort getragen, so daß der Faden **MC** gespannet wird, und mit dem ersten **CP** einen gewissen Winkel **PCM** machet.

Durch diesen Winkel **PCM** und durch die bekannte specifische Schwere der Kugel, wie viel sie nämlich schwerer als das Wasser ist, kann man leicht des Stromes Kraft und Geschwindigkeit finden. Denn es verhält sich der Unterschied der Schwere der Kugel und der Schwere eines gleich großen Wasserkörpers, zu der Kraft des Stromes, welche die Kugel in dieser Lage erhält, wie der Radius **CA** zu der Tangente **AG** des Winkels **PCM** zwischen den zwey Fäden **CP** und **CM** (70 u. folg.) Ist dieser Unterschied der Schwere = **u**, und der Radius **CA** = 1; so ist des Stromes Kraft $k = u$ tang **PCM**. Diese Kraft des Stromes aber ist nur halb so groß als diejenige, welche auf den größten Durchschnitt der Kugel senkrecht stößt, wie wir unten beweisen werden. Um also die ganze Kraft des Stromes zu entwickeln; so sey der Kugel **M** Durchmesser **d**, ihre größte Zirkelfläche **ndd**, ihr Inhalt $\frac{2}{3}\,nd^3 = \frac{2.11d^3}{3.14}$ $= \frac{11d^3}{21}$, ihre specifische Schwere, **s**, das Gewicht eines Kubikschuh Wassers **f**: so ist der Kugel Gewicht $\frac{11d^3fs}{21}$; und genannter Unterschied $u = \frac{11d^3f}{21}(s-1)$.

Daher die Kraft $k = \frac{11d^3f}{21}(s-1)$ tang **PCM**; und die Kraft, welche auf die größte Zirkelfläche stößt, $2k = \frac{22d^3f}{21}(s-1)$ tang **PCM**.

Will

Will man die Höhe h suchen, auf welche sich des Stromes Geschwindigkeit g bezieht: so hat man $\frac{11d^2hf}{14}$ $= \frac{22d^3f}{21}(s-1)$ tang PCM; folglich $h = \frac{4}{3}d(s-1)$ tang PCM; und $g = \sqrt{2ph} = \sqrt{(\frac{8}{3}dp(s-1)}$ tang PCM).

Setzen wir z. B. $d = 3$ Zoll, $s = 2$, und tang PCM $= 1$; so ist $h = 4$ Zoll, und $g = \sqrt{(2.30,2.\frac{1}{3})}$ $= \sqrt{(\frac{60,4}{3})} = 4,487$ Schuh.

708. Man könnte auch noch zu größerer Bequemlichkeit, statt des Quadranten (706) ein **Dreyeck** aus drey Stäben **AC, AL, CL** (Fig. 285) zusammensetzen, davon die Höhe oder der senkrechte Stab **AC** in viele gleiche Theile, wie auch die Grundline oder der horizontale Stab **AL**, der 2 bis 3mal so groß als der senkrechte wäre, in eben solche Theile getheilet ist. Das übrige ist, wie beym Quadranten; die obere Ecke **C** nämlich ist statt des Mittelpunkts, worin die Fäden mit den Gewichtern befestiget sind.

Die Bequemlichkeit besteht darin, daß man so nicht nöthig hat die Sinustafeln nach zu schlagen: sondern man setzet statt tang PCM, nur $\frac{AG}{AC} = \frac{m}{n}$, wo n die Zahl der kleinen Theile von AC und m die von **AG**, welche der Faden **CM** abschneidet, bedeutet.

Hernach kann man auch in den vorigen Formeln (706) statt u nur das Gewicht q setzen, welches man findet, wenn man die Kugel **M** im Wasser abwägt;

und

und statt $s - 1$ den Ausdruck $\frac{q}{Q-q}$, worin Q der Kugel Gewicht in der Luft, und q das im Wasser bedeutet: so hat man

1) Des Stromes Kraft, welche er gegen die Kugel M in dieser Lage ausübet, $k = q \frac{m}{n}$;

2) Des Stromes Kraft, wenn er auf eine Ebene stößt, welche ihrem größten Durchschnitte gleich ist, $2k = 2q \frac{m}{n}$.

3) Die Höhe, auf welche sich des Stromes Geschwindigkeit bezieht, $h = \frac{1.d.q.m}{3(Q-q)n}$.

4) Des Stromes Geschwindigkeit $g = \sqrt{(2ph)} = \sqrt{(\frac{2pdqm}{3n(Q-q)})}$.

709. Durch diese zwey Instrumente, den Quadranten und das Dreyeck (707 u. 708) kann man auch leicht finden, wo des Stromes Kraft und Geschwindigkeit grösser sey, in der Tiefe oder an der Oberfläche. Man darf zu dem Ende die Kugel M nur tiefer oder nur bis unter die Oberfläche ins Wasser lassen. Und das Dreyeck zeiget durch den horizontalen Stab gleich das Verhältniß der Kraft; und die Wurzel von diesem das Verhältniß der Geschwindigkeiten an diesen Oertern. Will man die wirkliche Kraft und Geschwindigkeit haben; so findet man sie leicht nach vorigen Formeln.

Man

Man muß aber dabey acht haben, daß man die Kugel M nicht zu schwer und nicht zu leicht mache. Ist sie zu schwer; so zeiget sie die kleinen Veränderungen des Stromes nicht: und ist sie zu leicht; so schwingt der Faden: welches beides der Genauigkeit hinderlich ist. Indessen scheinet mir doch das Dreyeck sehr bequem, und daß es dem Quadranten vorzuziehen sey, welcher von praktischen Hydraulikern sehr gebrauchet wird.

# Von dem Stoße und Widerstande der flüßigen Körper.

## 710.

Wir haben bisher durch die Abhandlung der Bewegung der Flüßigen auch vieles von ihrem Stoße und Widerstande kennen lernen: doch mangelt hierin noch verschiedenes: darum müssen wir hievon eigends, und zwar nach Herrn Bezout handeln.

711. Stellen wir uns vor, ein Körper M (Fig. 286) stoße mit seiner ebenen Fläche AB senkrecht auf eine Lage unendlich kleiner unelastischer Körperchen, deren Masse zusammen m ist. Ist da die Geschwindigkeit vor dem Stoße G; so ist die nach dem Stoße $\frac{MG}{M+m}$ (192); folglich die verlorene $G - \frac{MG}{M+m} = \frac{mG}{M+m} = \frac{mG}{M}$, weil m gegen M unendlich klein ist; und die Größe der Bewegung, welche M verloren, oder der Widerstand den M gelitten, $\frac{mG}{M} \times M = mG$.

Denkt

Denkt man nun, daß der Körper M, in einer unendlich kleinen Zeit, um eine unendlich kleine Größe Bb fortrücke, und daß nach und nach jede Lage der Theilchen, die er stößt, zernichtet werde, um der andere Platz zu machen, damit sie eben so gestoßen werde: so ist klar, daß von B bis b, die Geschwindigkeit nur unendlich wenig vermindert werde; und der Verlust der Bewegung, welchen der Körper beym Anstoße jeder Lage leidet, eben so beschaffen und = mG sey. Also ist dann die Summe aller Widerstände, welche alle Lagen von B bis b machen, mG, sovielmal genommen, als solche Theilchen in dem Raume Bb sind. Nennet man nun die Dicke eines unendlich kleinen Theiles a: so drückt $\frac{Bb}{a}$ die Zahl von allen aus, welche nach Bb gestellet werden können. Daher hat man zum Widerstande, welche M einen Augenblick lang leidet, $mG \times \frac{Bb}{a}$.

Aber die Masse der ersten Lage ist derselben Größe (oder Volumen) multiplicirt mit ihrer Dichte, nämlich m = DSa, wenn man diese Dichte D, und die Oberfläche AB, S nennet. Also wird der Widerstand, den ich R nenne, $R = DSaG \times \frac{Bb}{a} = DSG \times Bb$.

Beobachten wir nun, daß Bb der in einer unendlich kleinen Zeit dz durchlaufene Raum ist, bey dem die Geschwindigkeit als gleichförmig angenommen werden kann: so hat man Bb = Gdz; folglich $R = DSG^2dz$.

712. Wenn man gedenket, daß die kleinen Körperchen, wovon wir erst gesprochen, die Theilchen seyn, welche ein unzusammendrückliches Flieſsige ausmachen: so wird man bemerken, daß, weil die Eigenschaft der Flieſsigen ist, den empfangenen Druck alsogleich nach allen

Sei-

Seiten fortzupflanzen, sobald die benachbarten Theilchen von AB den Stoß empfangen, sie diesen auf die benachbarten Theile fortpflanzen und diese nöthigen werden, nach der Länge der Oberfläche des Körpers fortzulaufen, um den Raum anzufüllen, welchen der Körper durch seine Bewegung hinter sich leer zu lassen trachtet: und sie werden denen nachfolgen, welche sie fortgetrieben, um den neuen, Platz zu machen, die ebenfalls den Stoß vom Körper M empfangen, und hernach auf dieselbe Weise wirken werden: u. s. f. Also drücket $DSG^2dz$ überhaupt den Widerstand aus, welchen der Körper M leidet, der in dem Fließigen beweget wird, dessen Dichte D ist, gesetzt, daß jede Lage nachdem sie den Stoß empfangen, entwische.

713. Wenn also ein anderer Körper in einem andern Fließigen, dessen Dichte D' ist, mit der Geschwindigkeit g beweget wird, und mit einer Fläche s senkrecht stößt: so hat man für den Widerstand, den er in demselben Augenblicke dz leidet, und den wir r nennen, $r = D'sg^2dz$. Daraus schließt man, $R : r = DSG^2dz : D'sg^2dz = DSG^2 : D'sg^2$. Das ist:

Wenn zwey Körper in zwey Fließigen von verschiedener Dichte D und D', mit verschiedener Geschwindigkeit G und g beweget werden und mit zwey Flächen S und s senkrecht anstoßen: so sind die Widerstände, die sie in einem Augenblicke empfinden, wie die mit den Flächen und den Quadraten der Geschwindigkeiten multiplicirten Dichten.

714. Sind also die stoßenden Flächen, und die Dichten einerley: so sind die Widerstände wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, $R : r = G^2 : g^2$.

Daher sind die Widerstände, welche derselbe Körper in demselben Flieſsigen nach und nach leidet, in gleichen Augenblicken, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten.

715. Nach dem (712) gegebenen allgemeinen Satze ist also die Verhältniß der Widerstände leicht zu finden, wann entweder die Dichten, oder die Oberflächen, oder die Geschwindigkeiten gleich sind. Man sieht also durch die Gleichung $R = DSG^2dz$, daß, wenn übrigens alles gleich ist, der Stoß des Flieſsigen desto gröſser sey, je dichter es ist. Daher der Stoß vom Meerwasser gröſser als vom süſsen; vom kalten Wasser gröſser als vom warmen; vom warmen Wasser gröſser als von der Luft.

716. Wenn das Flieſsige elastisch wäre, und die erste Lage sobald sie den Stoß empfangen, zernichtet werden könnte, bevor noch eine Wirkung auf die folgenden geschähe: so hätte alles dieß, was wir gesagt haben, auch da statt; doch mit diesem Unterschiede, daß der wirkliche Widerstand noch einmal so groß wäre, als vorher; wie nach Bezouts Meinung von dem Stoße fester Körper abzunehmen.

Doch verhelet Bezout selbst nicht, daß diese Gründe nicht hinlänglich seyn den wirklichen Stoß zu bestimmen; sondern sie dienen nur das Verhältniß davon anzugeben: obwohl auch ich dafür halte, daß dieß Verhältniß zwischen dem Stoße elastischer und unelastischer Flieſsigen auch nicht richtig sey; weil der Stoß von Flieſsigen mit dem von Festen nicht verglichen werden kann.

717. Wenn man statt dessen, daß in einem Augenblick dz der Körper M alle kleine in dem Raume ABba (276) enthaltenen Körperchen stoße, gedenket, er sey un-

beweglich, und werde in jedem Augenblicke dz, von einer nach dem Inhalte, ABba gleichen, und mit der Geschwindigkeit G bewegten Masse Fließigen gestoßen, die sich nach dem Stoße gleich zernichtet: so ist nach dem geführten Beweise einzusehen, daß die Größe dieses Stoßes denselben Ausdruck $DSG^2dz$ haben werden.

**Daraus ist zu schließen: daß es alles eins ist, es stoße der Körper das Fließige, oder das Fließige den Körper; wenn die Geschwindigkeit einerley ist.**

718. Führen wir das, was wir erst von dem Widerstande oder Stoße der Fließigen entwickelt haben, auf bekanntere Maße.

Wenn man setzet, daß h die Höhe sey, von welcher ein Körper fallen muß, um die Geschwindigkeit G zu erlangen, mit welcher er sich zu bewegen vorausgesetzet worden: so hat man, wenn p die Geschwindigkeit ist, welche die Schwere in einem freyen Körper, in einer Sekunde Zeit, hervorbringet, $h = \frac{G^2}{2p}$, oder $G^2 = 2ph$. Daher ist der (711) gefundene Widerstand $R = DSG^2dz = 2DShpdz$: das ist, da pdz die Wirkung der Schwere für einen Augenblick dz ausdrückt; dem Gewichte eines fließigen Körpers von dieser Art oder Dichte D gleich, welcher zur Grundfläche S, und zur Höhe 2h hat, die doppelte nämlich, von welcher er fallen müßte, um die gesetzte Geschwindigkeit G zu erlangen.

Wir haben aber doch selbst (654 u. 687) schon gesehen, daß die Kraft eines Stromes nur dem Gewichte des fließigen Körpers gleich sey, welcher nebst der

gesetzten Grundfläche nur die Höhe hat, von welcher ein Körper fallen muß um die gesetzte Geschwindigkeit zu erlangen: welches auch insonderheit der pitotische Strommesser (706) bestätiget, worin das Wasser just so hoch steiget, als der Fall ist, worauf sich die Geschwindigkeit bezieht; und womit **Newtons** Theorie übereinstimmt.

Man muß also diese Formeln nach Bezout, nur als Verhältnisse ansehen: welches er selbst sagt; und deßwegen noch den Buchstaben n, welcher $= \frac{1}{2}$ seyn kann, beyfüget; und den Ausdruck auch so $R = 2nDShpdz$, und $R = nDSG^2dz$ machet.

719. Wie kommt aber das, daß durch diese Rechnung (718) nur die Verhältniß, oder das doppelte vom Widerstande, und nicht der wirkliche Widerstand gefunden wird; da es doch scheint, daß man diesen zur Absicht gehabt? Dieß kömmt nämlich daher; weil statt eines untheilbarn Punktes der Zeit, wie man den Stoß, den Widerstand des Flieſsigen zu betrachten pfleget, eine, obschon unendlich kleine, doch eine theilbare Zeit, wie man diesen Stoß, diesen Widerstand doch nicht betrachtet, gesetzet worden. Darum darf man gar nicht, wie Bezout geneigt ist, daran zweifeln, ob der Ausdruck $R = 2DShpdz$, auch wohl nur das Verhältniß des Widerstandes, oder nicht vielmehr den wirklichen Widerstand vorstelle. Wir werden also, ohne allen Zweifel den wirklichen Widerstand $R = DShpdz$ setzen; weil dieser Ausdruck mit unläugbarn Grundsätzen und Erfahrungen (718) übereintrifft.

Allein, schon wieder einen Zweifel dargegen! indem man für die Kraft des aus Gefäßen (Fig. 257. u. 258) strömenden Flieſsigen, den Ausdruck, wie Bezout folgender gestalt findet.

Es sey des Wassers, oder was immer für eines Fließigen Höhe in diesen Gefäßen, x, und ein unendlich kleiner Theil Bb davon, dx; des Gefäßes Weite AB = b, und der Oeffnung ihre QP = e. Nun sinke das Fließige um die unendlichkleine Höhe Bb, das ist, es ströme das Element bdx durch die Oeffnung PQ hinaus; und habe da die Gestalt des unendlich kleinen Zylinders Pg = ey (wenn Qg = y ist) = bdx. Dieses Pg hat die Geschwindigkeit $\sqrt{(2px)}$. Folglich ist die Kraft seiner Bewegung $bdx\sqrt{(2px)}$. Ferner ist der in einer unendlich kleinen Zeit dz durchlaufene Raum $y = \frac{bdx}{e}$.

Folglich hat man $\frac{bdx}{e} = \sqrt{(2px)}dz$; und $bdx = e\sqrt{(2px)}dz$. Dieser Werth von bdx in den Ausdruck der Kraft der Bewegung gesetzt, giebt $bdx\sqrt{(2px)} = 2expdz$. Multiplicirt man ihn noch mit der Dichte D, wie es ganz natürlich geschehen kann: so hat man einen Ausdruck 2Dexpdz, der dem vom Bezout ganz ähnlich oder gleich ist, indem e = S, und x = h ist.

Da könnte man doch wohl auf die Gedanken kommen, daß dieser Ausdruck 2Dexpdz die Schwere des Wassers ACQP (Fig. 261) vorstelle, welches wärendem Ausflusse sich stets bewegen müsse; das untere in PQ am geschwindesten, und zwar mit gesagter Geschwindigkeit; das obere immer langsamer; und überall mit einer Geschwindigkeit, die sich wie umgekehrt des Gefäßes Weite verhält (655). Denn der Inhalt dieses Wassers ACOP ist just das gedoppelte von dem Zylinder PQ × DB, oder ex (685 u. 686); oder = 2ex = 2Sh; und so könnte die Kraft der Bewegung des Wassers in der Mündung $bdx\sqrt{(2px)}$, welche durch den steten Druck 2expdz dieses Wassers ACOP unterhalten wird, diesem Drucke auch wohl gleich seyn.

Machen wir aber diese Rechnung noch anders; nur mit der Veränderung der Benennung der Höhe, von welcher ein Körper in einer Sekunde fällt, und der Geschwindigkeit, die er da am Ende des Falles erlangt. Wir wollen nämlich diese ganze Höhe, statt durch $\frac{1}{2}p$, durch die Einheit, durch 1 ausdrücken, und der Namen davon, von dieser Größe oder Höhe, soll seyn Hoh. So fiele der Körper in 1 Sekunde 1 Hoh, in 2 Sekunden 4 Hoh, in 3 Sekunden 9 Hoh, u. s. f. So wollen wir auch die in 1 Sekunde

durch

durch den Fall erlangte Geſchwindigkeit ſtatt durch p, durch 1 Gee ausdrücken. Dieſes kann gar wohl geſchehen. Denn die Geſchwindigkeit des Körpers iſt nicht der von ihm zurückgelegte Raum, ſondern eine Eigenſchaft oder Beſchaffenheit von ihm, wodurch er in einer gewiſſen Zeit einen gewiſſen Raum zurücklegen kann. So kann man dann dieſe Beſchaffenheit, die er nach einer Sekunde Fall erlangt, gar wohl mit der Einheit, mit 1 ausdrücken, und dieſer Gröſse einen beliebigen Namen Gee geben; ſo daſs, wenn man ſagt: ſeine Geſchwindigkeit iſt 1 Gee, 2 Gee, 3 Gee, u. ſ. f. man verſteht, ſeine Geſchwindigkeit iſt 1, 2, 3, ꝛc. mal ſo groſs, als die, welche er durch 1 Sekunde Fall erlanget. Nun zu der Rechnung.

Nach dieſer Benennung findet man die Geſchwindigkeit g des aus den zuvor genannten Gefäſsen ausſtrömenden Waſſers, durch folgende Proportion:

$\sqrt{1^h} : \sqrt{x} = 1^g : g$ (wo $1^h$ ſoviel als 1 Hoh, und $1^g$ ſoviel als 1 Gee heiſst) nämlich $g = \sqrt{x}$. Daher iſt die Kraft der Bewegung des ausſtrömenden Waſſers $bdx\sqrt{x}$; und $bdx = e\sqrt{x}.dz$; folglich $bdx\sqrt{x} = exdz$; das heiſst: die Kraft dieſes ſtrömenden Waſſers iſt der Schwere der Waſſerſäule ex gleich, die man bekommt, wenn man die Oeffnung e mit des Waſſers Höhe x in dem Gefäſse multiplicirt; weil dz oder 1dz die von der Schwere in einer Sekunde hervorgebrachte Geſchwindigkeit bedeutet.

Suchen wir nach eben dieſen Benennungen für den von Bezout gefundenen Widerſtand $DSG^2dz$ einen andern Ausdruck in bekanntern Maſsen: ſo ſetze ich dieſe Proportion,

$$I^h : I^g = h : G^2.$$

Daher iſt $G^2 = h$; und $DSG^2dz = DShdz$: welches die vorige Regel giebt.

Machen wir ein Beyſpiel hierüber, geſetzt, daſs $G = 2$ Gee $= 2.30{,}2 = 60{,}4$ Schuh ſeyn. So iſt $h = G^2 = 4$ Hoh $4.15{,}1 = 60{,}4$ Schuh.

Dieſes habe ich wollen beyfügen, um allen Zweifel zu heben, daſs der von Bezout und andern eben ſo für des Waſſers

Widerstand gefundene Ausdruck 2DShpdz nur vom Verhältniß zu verstehen; und also diese Theorie auch mit der Erfahrung übereinstimme.

Was wird man aber da sagen, wenn sogar die Versuche, die Erfahrungen miteinander streiten, einige die doppelte Höhe des Falles, andere die einfache für des Stromes Kraft angeben. Allein hierin hat P. Scherfer in dem 2 Theile seiner Mechanik schon eine vernünftige Entscheidung gegeben, da er die vielen von Michelotti in Turin mit dem pitotischen Strommesser gemachten Versuche, welche alle sehr genau für des Stromes Kraft die einfache Höhe des Falles anzeigen, gutheißet; und die von Herrn Kraft in Petersburg, mit einem Hebel, woran das Wasser stößt, gemachten Versuche, wodurch beynah die doppelte Höhe angegeben wird, und Bornoulli's Theorie und Versuche bestätiget werden sollen, verwirft.

Weil wir nun schon die in einer Sekunde Fall erlangte Geschwindigkeit eines Körpers, mit Bezout, p geheißen haben: so wollen wir bey dieser Benennung bleiben; und ins künftige des Fließigen Widerstand oder Kraft R allezeit durch diese Gleichung $R = DShpdz = \frac{1}{2} DSG^2dz$ ausdrücken; weil das Quadrat der Geschwindigkeit $G^2 = 2ph$, oder $hp = \frac{G^2}{2}$ ist.

Zur Bestätigung dieser Wahrheit, setze ich noch daher die Resultate aus den neuen Versuchen (Nouvelles Expériences sur la resistance des fluides par MM. d'Alembert, le Marquis de Condorcet, & l'Abbé Bossut, Membres de l'Académie &c.) welche zu Paris 1777 mit Genehmhaltung der Akademie im Drucke erschienen; und auf einem 100 Schuh langen und 53 Schuh breiten Wasserbehälter oder Bassin, mit verschiedenen kleinen Schiffen gemacht worden, die von Gewichtern mittelst seidener über eine hohe und niedrige Rolle gehender Schnüre gezogen wurden.

Nachdem nämlich die den beobachteten gleichförmigen Geschwindigkeiten der Schiffe zugehörigen Höhen h', und die Höhen h der Wassersäulen, deren Schweren den Gewichtern gleich sind, durch Rechnungen gefunden worden: so geben diese folgende Resultate.

| Versuche | h in Zoll | h' in Zoll |
|---|---|---|
| 1 | 0,99 | 1,08 |
| 12 | 1,32 | 1,39 |
| 20 | 1,28 | 1,19 |
| 34 | 1,01 | 1,03 |
| 48 | 1,43 | 1,47 |

Man sieht durch diese Rechnungen, heißt es S. 173, daß die Werthe von h und h', nie sehr unterschieden seyen. Ihre Unterschiede können entweder den unvermeidlichen Irrthümern der Beobachtungen, oder den nicht so genauen Bestimmungen des Reibens und Widerstandes der Luft (welche auch mit in die Rechnung gekommen) zugemessen werden. Also kann man in der Ausübung ohne einen merklichen Fehler zu besorgen, sagen: daß der senkrechte oder gerade Widerstand einer im Wasser bewegten Ebene (wenn dieses breit und tief ist) dem Gewichte einer Wassersäule gleich sey, welche die gestoßene Fläche zur Grundfläche, und die der Geschwindigkeit des Stoßes zugehörige Höhe zur Höhe hat. In engen Kanälen oder Rinnen ist der Widerstand größer.

720. Man sieht also, daß es mit dem Stoße eines Fließigen auf die Oberfläche eines festen Körpers, oder mit dem Widerstande, den ein fester Körper in einem Fließigen leidet, nicht eben die Beschaffenheit habe, wie mit dem Stoße eines festen Körpers auf einen festen, von endlichen Größen. Dieser kann auf keine Weise mit einem Gewichte eines Körpers verglichen werden; wohl aber der Widerstand der Fließigen.

Die Ursache dieses Unterschiedes ist; weil bey dem Stoße eines Körpers von einer endlichen Größe, die Veränderung der endlichen Geschwindigkeit in einem Augenblicke geschieht: statt dessen die Größe der gestoßenen oder aus der Stelle vertriebenen Masse, da ein Körper in einem Fließigen mit einer endlichen Geschwindigkeit beweget wird, nnd in einem Augenblicke nur einen unendlichkleinen Raum zurücklegt, nur unendlichklein seyn kann.

Er verlieret also alle Augenblicke, nur eine unendlichkleine Geschwindigkeit. Der gelittene Verlust der Bewegung ist also mit dem zuvergleichen, welchen die Schwere in einem Körper, allen Augenblick verursachen kann.

Daher kann man schließen, daß der augenblickliche Stoß zwischen zweyen in einem Fließigen befindlichen festen Körpern geschehe, als wenn sie in einem leeren Raume wären; das ist, daß die Geschwindigkeit, mit welcher sie sich einander stoßen, zwischen beide vertheilet werde, als wenn sie in einem leeren Raume wären.

721. Das im vorigen §. gilt nur von vollkommen festen Körpern, wo der Stoß augenblicklich ist, wie gesagt worden. Allein so vollkommen feste Körper giebt es nicht, und nur wenige, die ihnen nahe kommen. Ueberall bey Körpern, wo ein Stoß geschieht, geschieht ein Eindruck, Theile von ihnen werden zusammen gedrücket: und wo sich diese nach dem Stoße wieder herstellen, wieder die erste Gestalt und Lage annehmen; die sind elastisch; einige mehr, andere weniger, wie schon gesagt: wo aber der Eindruck bleibt; die sind weich, unelastisch. So haben wir insonderheit ein Beyspiel von elastischen Körpern, an helfenbeinernen Kugeln; aber von weichen, unelastischen, eine Menge. Unserer Erdboden, die gemeine Erde ist weich, unelastisch, oder wenig fest, wenig elastisch: die Körper, welche von der Höhe fallen, Bomben, Stückkugeln, dringen tief hinein. Der Laim oder weiche Thon, woraus die Hafner (Töpfer) ihre Gefäße machen, ist wenig elastisch: solche weiche Kugeln, die zusammen stoßen, lassen nach ihrem Stoße tiefe Eindrücke zurück. Wozu alles dieses? Wir sehen hieraus, daß fast bey allen uns bekannten Körpern kein Stoß so augenblicklich geschehe, sondern überall eine Zeit lang daure, bis nämlich der Eindruck vollendet ist. Daraus müssen wir ferner schließen, daß

bey

bey dem Stoße der Körper, die Bewegung des einen in den andern, wenn dieser beweglich ist, nicht so augenblicklich übergehe; sondern nach und nach, bis der Eindruck vollendet ist: und, wenn sie einander entgegen sind, oder der eine unbeweglich ist, die Bewegung nicht augenblicklich vernichtet werde; sondern nach und nach, bis der Eindruck vollendet ist. Also ist dann auch bey unsern festen elastischen und unelastischen Körpern ein Druck, ein Widerstand, welcher der Schwere, dem Gewichte der Körper ähnlich ist, wodurch die Bewegung nach und nach übertragen, oder vernichtet wird, wie durch die Schwere geschieht. Diesen Druck nun, diesen Widerstand bey dem Stoße der Körper möchte ich bestimmen.

722. Um ihn uns begreiflicher zu machen, wollen wir annehmen, EFHG (Fig. 287) sey ein weicher Körper, Erde, Thon oder Laim; und es sey ein fester zylindrischer oder parallelepipedischer Körper AB, von der Höhe DC senkrecht gefallen, und in den weichen, um die Tiefe CB eingedrungen; und habe da, wie wegen des Zusammenhanges der Theile gewiß ist, einen steten Widerstand gefunden, durch welchen seine durch das Fallen in C erlangte Bewegungskraft, nach und nach zernichtet worden.

Aehnlich ist dieser Widerstand der Schwere (721), und wir wollen ihn beständig gleich annehmen, und mit der Schwere wirklich vergleichen; so wie der Fall des Körpers von der Schwere auch herrühret.

Es seyen also ABC, CDE (Fig. 288) zwey schiefe Ebenen, die gleiche Höhen AB = DE = a haben; auf der Länge der einen DC = h laufe ein Körper herab, und steige mittelst einer kleinen Rundung in C, ohne was von seiner Geschwindigkeit in C zu verlieren,

auf der Länge CB = t der andern wieder hinauf: so wird er die in C erlangte Geschwindigkeit wieder nach und nach verlieren, und endlich, wann er in B angekommen, keine mehr haben.

Dieß ist die Analogie die Aehnlichkeit vom Widerstande beym Stoße der Körper, auch der unvollkommen festen oder harten Körper. Der Körper AB (Fig. 287) fällt von D bis C, und erlanget hier in C eine gewisse Geschwindigkeit oder Bewegungskraft: dringt hernach in einen andern von C bis B, hinein, und verliert diese Bewegungskraft wieder. Ein anderer Körper K (Fig. 288) fällt auf der schiefen Ebene DC hinab; erlangt in C eine gewisse Geschwindigkeit; steigt auf der andern Ebene CB hinauf; und verliert seine Geschwindigkeit wieder. Also ist denn hier eine völlige Aehnlichkeit.

Nun sey die Kraft, womit der Körper K auf der Ebene DC hinabsteigt g, und seine Schwere s; und der Widerstand, den er empfindet, da er auf der Ebene CB hinauf steigt, sey w oder x: so ist

$$g : s = a : h ; \text{ und}$$

$$s : x = t : a ; \text{ mithin}$$

$$gs : sx = at : ha ; \text{ und}$$

$$g : x = t : h ; \text{ daher}$$

$$x = w = \frac{gh}{t}.$$

Wendet man dieß nun auf die 287 Fig. wo ebenfalls DC = h, und CB = t, und g des Körpers Gewicht, und w oder x der Widerstand ist: so hat man diesen Satz:

Es verhält sich des gefallenen Körpers Gewicht g, zu dem Widerstande w beym Eindringen in den andern, wie die Tiefe t, in die er dringt, zu der Höhe h, von welcher er gefallen; oder diesen: Es ist der Widerstand beym Eindringen w dem Produkte des Gewichtes g vom gefallenen Körper in die Höhe, von der er gefallen, dividirt durch die Tiefe t, in die er dringt, gleich.

Hieraus folgt, daß der Widerstand desto größer sey; je größer das Gewicht, je größer die Höhe, und je kleiner die Tiefe ist; und zwar unendlich groß, wenn die Tiefe null ist: welches der Fall der vollkommen harten Körper ist.

723. Will man auch den ungleichen Widerstand beym Eindringen oder Zusammendrücken stoßender Körper wissen, z. B. wann eine elastische Kugel EABD (Fig. 289) von einer Höhe fiele, und das Segment ACDBA hineingedrückt würde, als wenn es abgeschnitten wäre; so darf man nur überall den mit ACD parallelen Durchschnitt dieses Segmentes suchen: so wie dieser Durchschnitt; wird beym Zusammendrücken der Widerstand seyn; wie klar ist. Der ganze, die Summe von allen wird also seyn, wie der Inhalt dieses Segments ADB: und so müssen, wenn derselbe Körper von verschiedenen Höhen fällt, die dazu gehörigen eingedrückten Segmente, sich wie diese Höhen verhalten.

Da nun, wenn der Durchmesser BE = a, die Abscisse BC = x, die Ordinate CD = y, und des Zirkels Durchmesser zur Peripherie = 1 : p ist, das Element des Abschnittes, $py^2dx = p(ax - xx)dx$;

folg-

folglich der ganze Abschnitt $p\left(\frac{axx}{2} = \frac{x^3}{3}\right)$ ist: so müssen sich diese Ausdrücke $p\left(\frac{axx}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$, wie jene Höhe verhalten.

Wollte man die mittlere Proportionaltiefe t wissen, mit der der mittlere Widerstand w beym Zusammendrücken der Kugel multiplicirt werden müßte, um den Ausdruck $wt = gh$, oder ein Produkt wt des Widerstands in die Tiefe zu bekommen, welches dem Produkte gh, des Gewichts der Kugel g in die durchfallene Höhe h gleich ist; so müßte man durch die Summe der Elemente $p(ax - x^2)dx$ die Summe ihrer Momente $p(ax - x^2)xdx$, nämlich $p\left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$ durch $p\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ dividiren: so bekommt man diese mittlere Tiefe der Eindrückung $t = \frac{4ax - 3x^2}{6a - 4x} = \frac{5}{8}a$, wenn $x = \frac{1}{2}a$ ist. Und man findet überhaupt t, wenn x bekannt: wornach der mittlere Widerstand $w = \frac{gh}{t}$ gefunden werden kann.

724. Es ist möglich durch Versuche, die Tiefe des ganzen Eindruckes BC zu finden. Man darf nämlich eine marmorne Platte ganz wenig mit Unschlitt anschmieren, und dieses hernach mit einem leinenen oder wollenen Lappen, oder Stück Leder, so viel man kann wieder abwischen, sodann die helfenbeinerne Kugel senkrecht darauf fallen lassen, und beym Aufspringen gleich fangen: so wird diese das Merkmal eines Kreißes zurück lassen; dessen Durchmesser der Sehne AD des Abschnittes gleich seyn muß, und gemessen werden kann.

725. Sind die Merkmale der Kreiße (Fig. 290), welche ein von verſchiedener Höhe fallender Körper hinterläßt, ganz klein: ſo kann man ſagen, daß die eingedrückten Kugelſegmente, $p\left(\frac{axx}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{paxx}{2}$ ſeyn; ſich wie xx die Quadrate ihrer Höhen BC (Fig. 289) verhalten; weil $\frac{x^3}{3}$ gegen $\frac{ax^2}{2}$ nicht zu rechnen wäre. In dieſem Falle verhalten ſich alſo auch die Segmente, wie die Quadrate ihrer Grundflächen, oder wie die vierten Potenzen ihrer Halbmeſſer $CD^4 = y^4$; und ſo, nämlich wie $CA^4$ zu $DE^4$ (Fig. 290) müßten ſich auch die Höhen verhalten, von welchen derſelbe Körper gefallen, der dieſe Abdrücke der Kreiße hinterlaſſen, wovon CA und DE die Halbmeſſer ſind.

Dieſes letzte habe ich auch durch Verſuche erfahren, daß es ſo iſt. Ich habe nämlich eine helfenbeinerne Kugel von ungefähr $1\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmeſſer, einmal durch eine Höhe von ungefähr 15 Zoll, und das anderemal durch eine viermal ſo große Höhe oder 5 Schuh fallen laſſen; und darauf habe ich auf der beſchriebenen marmornen Platte ſolche Abdrücke der Kreiße beobachtet, woran die Halbmeſſer CA, DE dieſe Beſchaffenheit hatten; daß, wenn man in dem bey C rechtwinklichten Dreyecke ABC, die Hypothenuſe AB nahm, dieſe dem Halbmeſſer DE gleich war; oder wenn man ſtatt der Halbmeſſer die ganzen Durchmeſſer nahm, die Hypothenuſe beym kleinern Kreiße, dem Durchmeſſer des größern, ſo viel man wahr nehmen konnte, gleich kam. Die Flächen dieſer abgedrückten Kreiße verhielten ſie alſo, wie $CA^2 : AB^2 = 1 : 2$; und die vierten Potenzen ihrer Halbmeſſer, $CA^4 : AB^4 = 1 : 4$; wie die Höhen, durch welche der Körper gefallen war.

726.

726. Die obere (722) Formel $gh = wt$ kann leicht auf die Wirkung der Ramme (Fig. 291) wodurch man die Pfäle BD einrammet, angewendet werden. Und sie gilt ganz dafür, wie sie hier ist, wenn man den Widerstand in dem Pfahle betrachtet: welches besonders bey demselben Pfahle geschehen kann. Da ist nämlich g das Gewicht der Ramme (des Bäres, Fallblocks, Hoyes, Knechts, welches lauter Namen dieses Stückes AC sind); h die Höhe von welcher sie fällt; w der Widerstand im Pfahle; und t die Tiefe, in welche er auf einmal eindringt. So ist dann diese Tiefe $t = \frac{gh}{w}$; wie die Höhe h, wenn der Ramme Gewicht g und der Widerstand w einerley sind.

Will man aber wissen, was die Pfähle für einen Unterschied in dieser Wirkung oder Tiefe verursachen: so kann man dieses auch aus jener Formel herleiten. Ich setze statt jener kleinen Buchstaben große, und statt g, S, welches auch der Ramme Gewicht oder Schwere bedeutet; so daß man $WT = SH$ habe. Weil nun $H = \frac{G^2}{2p}$, wo G die zu H gehörige Geschwindigkeit, und p die Geschwindigkeit bedeutet, die ein freyer Körper fallend in der ersten Sekunde erhält: so hat man auch $WT = \frac{SG^2}{2p}$. Ist der Ramme Masse M, und des Pfahles, m, und sein Gewicht s: so ist nach dem Auffallen oder Stoße der Ramme auf den Pfahl die gemeinschaftliche Geschwindigkeit $g = \frac{MG}{M+m}$; folglich alsdann $wt = \frac{(S+s)g^2}{2p} = (S+s)h$, wenn die dem g zugehörige Höhe, h ist. Oder es ist $wt = \frac{(S+s)M^2G^2}{2p(M+m)^2} = S^2G^2$

$= \frac{S^2G^2}{2p(S+s)}$; weil $\frac{M}{M+m} = \frac{S}{S+s}$ ist: folglich auch $wt = \frac{S^2H}{(S+s)} = \frac{S}{S+s}$ SH. Und es ist, wenn $t =$ T, wie es seyn muß, $w : W = \frac{S}{S+s}$ SH : SH $= S:$ $S+s$; mithin $w = \frac{WS}{S+s}$; oder $W = \frac{(S+s)w}{S}$.

Es ist also der Widerstand W im Pfahle desto größer; je größer seine Schwere s, und je größer der Widerstand w der Erde ist. Daher kann das Eindringen des Pfahles in die Erde bey einem schwerern Pfahle nicht so groß als bey dem leichtern seyn, wenn alles übrige, S und w, gleich ist.

Setzet man die Schwere zweyer verschiedenen Pfähle s und s', und die Tiefen in die sie dringen, t und t': so ist nach dem vorhergehenden $wt : wt' = \frac{S}{S+s}$ SH: $\frac{S}{S+s'}$ SH'; das heißt, die Tiefen, in welche diese Pfähle bey derselben Ramme S und Höhe H, eindringen, verhalten sich, wie die Summen der Gewichter von der Ramme und dem Pfahle verkehrt, $t : t' = S+s' : S+s$. Und wenn alles gleich bis auf die Höhen H, H'; so verhalten sich die Tiefen t und t', wie diese Höhen; u. s. f.

So haben wir dann aus Gründen der Theorie, welche durch die Erfahrung bestätiget sind, für die Ramm-

maschinen eine Formel $wt = \frac{SSH}{S+s}$ hergeleitet, welche im Verhältniß mit der, welche Bezout (Cours de l'artil. 4 T. 385) bloß aus der Erfahrung geschlossen, übereinkommt; aber von dieser darin unterschieden ist, daß nach dieser nicht auch der Widerstand w des Erdreichs, wie nach unserer gefunden werden kann. Es ist nämlich nach unserer der Widerstand $w = \frac{SSH}{(S+s)t}$ bestimmt; gleichwie darnach die Tiefe $t = \frac{SSH}{(S+s)w}$ bestimmet wird: welches ein großer Vorzug vor jener ist; weil man dadurch mehr Kenntnisse erlangt. Diese und die obige Formel (722) hat noch mehr Vorzüge, die man hin und her, besonders beym Stoße der Körper erkennen wird; so daß es nicht nöthig ist, ihn durch Versuche mit einer Wage zu bestimmen, wie **Desaguliers** gewollt hat: das so nicht einmal möglich ist.

727. Wir wollen durch diese Formel $w = \frac{SSH}{(S+s)t}$ noch ein par Fragen aufzulösen suchen.

1) Ob man durch diese Formel nicht finden könne, was für ein schweres, und folglich was für ein großes oder hohes Gebäu auf Bürsten (mehr eingerammten Pfählen, einem Roste oder Pfahlwerke) aufgeführet werden könne? Und es erhället allerdings daraus, daß man dieses finden könne. Denn es seyen die Anzahl Pfähle $n$: so ist $nw = \frac{nSSH}{(S+s)t}$ die Schwere des ganzen Gebäues, welches darauf aufgeführet werden kann. Sind also alle Größen in dem letzten Gliede dieser Gleichung bekannt: so findet man diese Schwere $nw$, oder mögliche Last des aufzuführenden Gebäues. Z. B. wir wol-

len

len nach Belidors Hydraulik II. 201 annehmen, daß der Pfahl durch die 30 letzten Schläge $1\frac{1}{2}$ Fuß, oder durch den letzten Schlag 0,6 Zoll tief eindringe, da die Ramme 8 Zentner schwer, und ungefähr 5 Schuh oder 60 Zoll hoch falle: so ist, wenn $s = S$, der letzte Widerstand $w = \frac{8.8.60}{(8+8)0,6} = 400$ Zentner. Diese darf man also nur mit n multipliciren; so hat man die gesuchte Last.

2) Wir wollen setzen, der Pfahl werde so lang geschlagen, bis er gar nicht tiefer mehr eindringt, folglich $t = o$ zu seyn scheint: wie groß wird alsdann der Widerstand, oder die auf das Pfahlwerk zubauende Last seyn? Da ist gewiß, daß, wenn t wirklich null wäre, daß der Widerstand w, folglich die darauf aufzuführende Last unendlich groß seyn könnte: allein es scheint nicht, daß t jemals wirklich null seyn wird. Denn, wenn man auch keine Vermehrung der Tiefe t mehr, beym Schlagen, beobachtet: so können doch sowohl die Theile der Ramme und des Pfahles, als der Erde dem Schlage etwas nachgeben, dadurch ein wenig zusammengedrücket werden, und hernach wegen einiger Elasticität sich wieder herstellen oder ausdehnen. Thun sie nun dieses wirklich, wie sehr wahrscheinlich, und fast gewiß ist: so ist dann t noch immer etwas, wenn es auch noch so klein ist; folglich w nicht unendlich. Setzen wir dann, es seye nur 0,6 eines Punkts, welcher der 144ste Theil eines Zolles ist: so dürfen wir im vorigen Beyspiele 400 Zentner nur mit 144 multipliciren, und wir haben da $w =$ 57600 Zentner: so keine nnendliche Zahl ist.

Dadurch könnte man auch einen solchen Fall erklären, wenn er sich eräugen sollte, daß ein auf Bürsten, die nicht tiefer konnten eingeschlagen werden, aufgeführtes Gebäu, ehe es noch vollendet, mit den Pfählen sinken

sollte: gleichwie man vor etlichen Jahren von einem in Pohlen aufzuführenden Pallaste in Zeitungen gelesen, daß es geschehen; ungeachtet nicht dabey gestanden, ob er auf Bürsten gebauet worden, oder nicht. Es wäre nämlich ein Zeichen, daß diese Last größer geworden, als die Formel giebt.

3) Man kann durch diese Formel $w = \frac{SSH}{(S+s)c}$ auch die Wirkung der Schwungräder beurtheilen, erkennen und bestimmen.

Es ist bekannt, daß **Schwungräder** solche bey Maschinen angebrachte Räder sind, wodurch die Bewegung der Maschinen gleichförmiger erhalten wird, als sie sonst, ohne diese Räder seyn würde. Es muß nämlich das Schwungrad, wenn die Kraft nicht ohne Unterlaß, sondern absatzweise wirket, in der Zwischenzeit, ihre Wirkung vertreten. Wir wollen sehen, wie dieses zugehe, wie diese Wirkung zu begreifen.

Setzen wir: alle Ausschnitte eines Schwungrades seyen gleichartig; und die Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Schwere eines unendlichkleinen Ausschnittes sey diejenige, welche ein Körper durch den Fall von der Höhe H erlangt; und des Rades Masse oder Schwere sey S; und in dem Mittelpunkte des Schwunges oder Stoßes, welcher nach (380) gefunden wird, sey ein Widerstand w, dessen Masse s ist, angebracht: so ist klar, daß, wenn t der Raum ist, durch welchen sich dieser Schwungpunkt so lang bewegt, bis des Rades Schwungkraft (welche das Produkt seiner Masse in gesagte Geschwindigkeit ist, und in dem Schwungpunkte oder Schwungkreiße beysammen zu denken) verloren geht, man den Ausdruck dieses Widerstandes $w = \frac{SSH}{(S+s)t}$

bes

bekomme. Denn da ist zwischen der Einrammung und der Wirkung dieses Schwungrades eine völlige Aehnlichkeit, wie einem jeden aus seiner eigenen Betrachtung erhellen wird.

Also läßt sich in dieser Gleichung $w = \frac{SSH}{(S+s)t}$ jede größe, wenn die übrigen bekannt sind, finden. Wir wollen z. B. $t = \frac{SSH}{(S+s)w}$ den Raum des Schwungpunktes bis zur Vernichtung der Schwungkraft finden; wenn des Rades Gewicht $S = 20$ Pfund; die Höhe $H = 15,1$ Schuh; der Widerstand $w = 1$ Pfund; mithin auch $s = 1$ ist. Da ist nämlich $t = \frac{400.15,1}{21}$

$= \frac{6040}{21} = 287,6$ Schuh.

Ist der Widerstand w, dessen Masse s ist, an des Schwungrades Welle angebracht, deren Halbmesser r ist, da des Schwungkreißes seiner R gesetzt wird: so wirket der Widerstand w mit seiner Masse s um so viel weniger gegen die Schwungkraft; und man wird $\frac{rw}{R} = \frac{SSH}{(S+\frac{rs}{R})t}$ setzen können. Daher ist $rw = \frac{RRSSH}{(RS+rs)t}$: woraus man finden kann, was man will. Wir wollen z. B. wie vorher, da nebst den vorigen Größen $r : R = 1 : 10$ ist, den Raum $t = \frac{RRSSH}{(RS+rs)rw}$ suchen. Da ist nämlich $t = \frac{100.400.15.1}{(200+1)1} = \frac{604000}{201}$

$= 3004,9$ Schuh.

Es wird nicht nöthig seyn, die Formeln hieher zu setzen, wann des Widerstands Masse $s = o$ ist; wie etwa bey der Reibung geschieht: weil sie aus den vorigen leicht entstehen, wenn man darin $s = o$ setzet.

So läßt sich auch ganz leicht die Zeit Z finden, in welcher die Schwungkraft verloren geht. Denn es erhället aus der Analogie der schiefen Ebenen von gleicher Höhe, daß die Zeiten Z und z sich wie die Räume t und H verhalten. Wenn also die Höhe H, und die Zeit z, in welcher ein Körper durch sie fallen kann bekannt sind: so kann man leicht aus den gefundenen Raume t die Zeit Z, in welcher die Schwungkraft zernichtet wird, finden. Es ist nämlich diese Zeit $Z = \frac{tz}{H}$; im ersten Beyspiele $Z = \frac{287,6}{15,1} = 19$; und im andern $Z = \frac{3004,9}{15,1} = 199$ Sekunden.

Hieraus ist auch klar, daß um die Zeit Z der Zernichtung der Schwungkraft zu finden, man in dem Werthe, von $t = \frac{RRSSH}{(RS + rs)rw}$ statt H nur $\sqrt{\frac{2H}{p}}$, welches die Sekunden ausdrücket, in welchen ein Körper durch die Höhe H fallen kann, setzen darf: wodurch man

$$Z = \frac{RRSS\sqrt{\frac{2H}{p}}}{(RS + rs)rw}$$ bekömmt.

Es wird nicht nöthig seyn, die verschiedenen Veränderungen dieser Formel zu zeigen, und Beyspiele darüber zu geben, wenn $s = o$, und $r = R$, u. s. f. gesetzet wird: weil sie ein jeder selbst leicht finden kann.

So

So sieht man dann nun ganz klar ein, wie ein Schwungrad eine Zeit lang arbeiten, und die Bewegung der Maschine fortsetzen kann, wann die ordentliche Kraft mit ihrer Wirkung eine kurze Zeit aussetzet.

# Vom Widerstande der schiefen Ebenen.

## 728.

Betrachten wir den Widerstand der schiefen Ebenen; und setzen wir, das Flieſsige bewege sich.

Stellen wir uns einen Körper vor, wie die 292 Fig. weiset, daran die drey Ebenen EFGL, AELD, AEFB gegen einander senkrecht seyen, und die drey andern eine solche Gröſse und Neigung haben, als man will; jedoch so, daſs nur die Fläche ABCD dem Stoſse des Flieſsigen ausgesetzet sey, welches sich nach der Richtung Tg, parallel mit AE oder senkrecht auf EFGL bewege. Richten wir auf der Ebene ABCD die Senkrechte gR′ auf; so kann man sich eine Ebene einbilden, die durch diese Line, und die Line gT geht. Diese Ebene wird senkrecht auf den zwey Ebenen ABCD, EFGL seyn; und verlängert in dem Körper einen Schnitt MHIN machen, welcher gegen die zwey Ebenen AELD, AEFB geneigt ist. Ferner, da er durch die Gerade gT geht, welche des Flieſsigen Richtung ist: so fahren alle Theilchen des Flieſsigen an die Fläche ABCD nach solchen Richtungen an, die mit diesem Schnitte MHIN parallel sind; so daſs, wenn man den Körper nach mehrern Ebenen, die mit MHIN parallel sind, geschnitten

gedenket, man von jedem solchen Schnitte das sagen kann, was wir von diesem sagen werden.

Es sey also p (Fig. 293) ein Theilchen, welches an die durch MN vorgestellte Fläche anfährt. pG stelle die Richtung, wie die Geschwindigkeit G vor. Machet man auf dieser Line wie auf der Diagonale das Parallelogramm pKGL, daran die Seite pK auf MN und die Seite pL senkrecht auf MN sey; und denket man in dem Augenblicke, wo dieses Theilchen anfährt, es sey seine Geschwindigkeit pG aus zwey andern zusammengesetzt, deren eine pK nach MN, und die andere pL senkrecht gegen MN gerichtet ist: so ist klar, daß dieses Theilchen nur kraft der Geschwindigkeit pL auf den Körper wirke. Denn kraft der Geschwindigkeit pK kann es sich nur längst der Fläche MN bewegen, welche vollkommen glatt und ohne Reibung gesetzet wird, und also nach dieser Richtung pK von dem Theilchen p keine Bewegung empfangen kann. Daher geschieht der Stoß von dem Theilchen p mit der Größe der Bewegung, welche durch pXpL ausgedrücket wird. Da nun die andern Theilchen des Flüßigen, die zu gleicher Zeit auf andere Punkte der Ebene anstoßen, von gleicher Richtung und Geschwindigkeit gesetzet werden: so kann man diesen Ausdruck pXpL auf ein jedes anwenden; so daß, wenn die Masse von allen diesen Theilchen m ist, die Größe der Bewegung, welche durch den gesammten Stoß in den Körper, senkrecht gegen die Ebene, übergeht, mXpL ist.

Nun von der Größe der Bewegung zu urtheilen, die in einer unendlich kleinen Zeit dz übergeht: so muß man die Zahl der Flüßigen Blättchen bestimmen, die in dieser Zeit dz anstoßen. Diese Zahl ist offenbar die nämliche, welche der mit dieser Geschwindigkeit G be-

weg-

wegte Körper anträfe. Setzen wir also, der Körper bewege sich, so daß die Ebene ABCD (Fig. 292), welche durch ABCD (Fig. 294) vorgestellet wird, in der Zeit dz, parallel mit sich selbst, in abcd komme, und der Punkt g auf gT die unendlich kleine Line gr beschreibe. Zieht man die Line gs senkrecht auf abcd: so ist klar, daß zwischen ABCD und abcd, nicht mehr flüßige Blättchen enthalten werden können, als die Dicke eines Theilchens in gs enthalten ist. Nennet man also die Dicke eines Theilchens a: so drücket $\frac{gs}{a}$ die Zahl dieser enthaltenen Blättchen aus; und $m \times pL \times \frac{gs}{a}$, die Größen der Bewegung, welche in der Zeit dz in den Körper, nach der Richtung, die senkrecht auf der Ebene ABCD ist, übergeht.

Da aber die Masse m des ersten Blättchens, seiner mit der Dichte multiplicirten Größe gleich ist: so hat man, wenn des Fließigen Dichte D, und die Ebene ABCD $=$ S ist, $m = DSa$. Also ist die Größe der Bewegung, die in den Körper übergeht, $D \times S \times pL \times gs$. Es ist also nur noch pL und gs zu bestimmen.

Nennet man den Incidenz- oder Einfallwinkel TgM (Fig. 292), welchen die Richtung der Bewegung eines jeden Theilchens mit der Oberfläche machet i, welcher der nämliche als MpO (Fig. 293) ist: so giebt das rechtwinklichte Dreyeck GpK die Proportion, $1 : pG = \sin i : GK$, oder pL; folglich $pL = pG \sin i = G \sin i$, weil pG die Geschwindigkeit bedeutet.

Was gs (Fig. 294) betrifft: hängt man die zwey Punkte r und s zusammen; so ist das Dreyeck grs in s rechtwinklicht, weil gR' oder gs senkrecht auf der Ebe-

ne abcd ist, in welcher sich rs befindet; und der Winkel grs ist dem Winkel TgM (Fig. 292), das ist dem Winkel i gleich. Man hat also, 1 : sin i = gr : gs; folglich gs = gr sin i; oder weil gr der in der Zeit dz, mit der Geschwindigkeit G, durchlaufene Raum, mithin, dem Verhältniß nach, = Gdz ist, gs = Gdz sin i, dem Verhältniß nach.

Setzet man diese Werthe von pL und gs in D×S ×pL×gs; und nennt diesen Widerstand oder Stoß R': so hat man, dem Verhältniß nach, $R' = DSG^2dz\sin^2 i$; und in der Wirklichkeit (719), $R' = \frac{1}{2}DSG^2dz\sin^2 i$.

729. Bemerken wir nun, daß, in dem Falle, wo die Ebene senkrecht anstößt oder gestoßen wird, wir den Widerstand $R = \frac{1}{2}DSG^2dz$ gefunden haben (719): so haben wir dann $R : R' = \frac{1}{2}DSG^2dz : \frac{1}{2}DSG^2dz\sin^2 i$; das heißt:

Wenn sonst alles gleich ist; so verhält sich der gerade Stoß oder Widerstand eines Flüßigen zu dem schiefen Stoße oder Widerstande bey derselben Ebene, wie das Quadrat des Radius, zu dem Quadrate des Sinus des Einfallwinkels. Also läßt sich einer aus diesen Widerständen allezeit durch den andern finden.

730. Der Widerstand, den wir erst gefunden haben, geht senkrecht gegen die Fläche fort. Oft aber hat man nöthig die Wirkung davon, nach einer gegebenen Richtung zu kennen: sehen wir, wie man dazu gelange.

Es ist leicht einzusehen, daß, weil die Kraft (Fig. 292) senkrecht gegen die Ebene ABCD gerichtet ist, welche gegen die Ebenen AEFB, AELD, EFGL geneigt ist, die wir senkrecht gegen einander gesetzet haben,

sie

sie dem Körper, nach Richtungen, welche senkrecht gegen diese Ebenen sind, Bewegung mitzutheilen strebe.

Um eine jede von diesen drey Bestrebungen zu bestimmen, so muß man die auf ABCD senkrechte Kraft in drey andere zerlegen, die senkrecht auf diesen Ebenen sind. Man gelanget geschwinder dazu, wenn man eine davon, auf folgende Weise bestimmet: wodurch man auf die andern schließet.

731. Tragen wir diese Aufgabe allgemein vor: Es sey die gegen die Ebene ABCD (Fig. 295) senkrecht gerichtete Kraft R′ bekannt: man soll ihr Bestreben nach einer auf die Ebene EFGL senkrechten Richtung bestimmen.

Man denke eine Ebene, welche durch der Kraft R′ Richtung gR′ auf beide Ebenen ABCD, EFGL senkrecht geht. Die Durchschnitte dieser, und der zwey Ebenen ABCD, EFGL seyen MI und HI; und der gemeine Durchschnitt dieser zweyen, TK: so werden MI und HI senkrecht auf TK seyn; und der Winkel MIH wird das Maß der Neigung von diesen zwey Ebenen abgeben.

Machet man auf der für die Diagonale angenommene Verlängerung der Line R′g das Parallelogramm gROQ, welches sich auf der Ebene MIH befindet, und davon die eine Seite gR parallel mit der Ebene EFGL, und die andere gQ senkrecht darauf ist: so kann man statt der Kraft R′, die zwey Kräfte gR und gQ setzen. Da nun gR mit der Ebene EFGL parallel ist, folglich der Ebene ABCD keine Bewegung beybringen kann, wodurch diese sich der Ebene EFGL entweder näherte, oder davon entfernte; sondern nur eine solche, wodurch sie sich selbst stets parallel; und in gleicher Weite von der Ebe-

ne EFGL bleibt: so ist das einzige Streben, welches ABCD vermög der Kraft R′ hat, sich senkrecht gegen EFGL zu bewegen, gQ. Sehen wir den Werth von gQ.

Nach dem Grundsatze der Zerlegung der Kräfte, hat man, wenn die Kraft gQ, Q genannt wird, R′: Q = gO : gQ. Verlängert man aber gQ, bis sie HI in S schneidet; so sieht man leicht, daß die zwey Dreyecke OgQ, gSI ähnlich seyn: weil über die rechten Winkel in Q und S, die zwey Winkel OgQ und gIS als Complemente von SgI gleich sind. Man hat also gO : gQ = Ig : IS; folglich R′ : Q = Ig : IS. Aber das rechtwinklichte Dreyeck gSI giebt Ig : IS = 1 : sin IgS = 1 : cos SIg. Folglich ist R′ : Q = 1 : cos SIg; das heißt:

Das ganze Bestreben der auf der Ebene ABCD senkrechten Kraft R verhält sich zu dem Bestreben nach einer auf was immer für eine andere Ebene EFGL senkrechten Richtung, wie der Halbmesser zum Kosinus der Neigung dieser zwey Ebenen.

732. Was das Streben gR betrifft, welches parallel mit IH ist; so ist dieses dasjenige, woraus die zwey gegen die Ebene AEFB und gegen die Ebene AELD senkrechten Kräfte entstehen; so daß um diese zwey Kräfte zu haben, man dieses Streben gR, wie wir schon angemerket haben, in zwey andere, welche auf diese untereinander und gegen die Ebene EFGL senkrechten Ebenen senkrecht wären, zerlegen müßte. Aber es ist leicht einzusehen, daß die drey Kräfte, in welche alsdann die Kraft R′ zerlegt wäre, gegen einander senkrecht wären, und also keine von den dreyen zu der Wirkung der zwey andern etwas beytragen könnte. Also kann eine jede, wie wir erst gethan haben, bestimmet werden, indem

dem

dem man die Kraft R′ schlecht weg in zwey andere zerlegt, deren eine senkrecht und die andere parallel mit der Ebene ist, wovon es sich handelt; so daß die Kraft R′ zu einer jeden von den dreyen Wirkungen, die sie senkrecht gegen die unter einander senkrechten Ebenen, EFGL, AEFB, AELD ausübet, sich wie der Halbmesser zu dem Kosinus der Neigung der Ebene ABCD gegen eine jede von diesen drey Ebenen, verhält.

733. Dieses ist also das festgesetzte Verhältniß der drey Kräfte. Aber zu dem Gebrauche, welchen wir davon machen wollen, müssen wir es in ein anderes übersetzen.

Zu dieser Absicht sey ABCD (Fig. 296) was immer für eine Ebene. Stellen wir uns vor, daß von allen ihren Punkten Senkrechte auf was immer für eine Ebene A′B′FE gezogen seyen, welche die Ebene ABCD in der Geraden EF antreffen. Diese Senkrechten, werden auf der Ebene A′B′FE eine Oberfläche A′B′C′D′ formiren, welche man die **Projection** (den Entwurf) von ABCD nennet, und die sich zu dieser, wie der Kosinus der Neigung der zwey Ebenen, zu dem Halbmesser verhält.

In der That, wenn man auf der Ebene ABCD zwey gerade Linen MNP, mnp, einander unendlich nach und auf den gemeinen Durchschnitt FE senkrecht gedenket; und man sich zu gleicher Zeit ihre Entwürfe M′N′P, m′n′p vorstellet: so ist leicht einzusehen, daß, wegen der allgemeinen Höhe Pp, sich die zwey Oberflächen MmpP, M′m′pP, wie MP : M′P verhalten. Aus derselben Ursache verhalten sich die Oberflächen NnpP, N′n′pP, wie NP : N′P; oder, wegen der Parallelen MM′, NN′, wie MP : M′P; also auch die Oberflächen MmnN, M′m′n′N, wie MP : M′P. Nun giebt

das

das Dreyeck MM'P die Proportion MP : M'P = 1 : sin PMM'. Weil man nun die zwey Oberflächen als zusammengesetzt von kleinen übereinstimmenden Trapezen, wie MmnN, M'm'n'N' sind, deren jedes zu dem andern sich allezeit wie 1 : sin PMM' verhält, ansehen kann; so kann man überhaupt sagen, daß sich jede Ebene ABCD zu der von ihrer Projection, wie 1 : sin PMM' verhalte. Weil nun die Linen MP auf dem gemeinen Durchschnitte EF senkrecht sind: so ist der Winkel MPM', den sie machen, das Maß der Neigung der zwey Ebenen ABCD, A'B'C'D'; und wegen des rechtwinklichten Dreyeckes MPM', der Winkel MPM' das Complement der Neigung.

Also ist, wenn man auf was immer für einer Ebene, was immer für eine ebene Oberfläche entwirft, die entworfene Oberfläche, zu der von ihrem Entwurfe, wie der Halbmesser zu dem Kosinus der Neigung dieser zwey Ebenen.

734. Schließen wir also daraus, daß, weil die Kraft R', welche wir in drey andere auf drey untereinander senkrechten Ebenen senkrechte Kräfte zerlegen (295), sich zu einer jeden einzeln, aus denen sie zusammengesetzt ist, wie der Halbmesser zu dem Kosinus des Winkels, welchen diese Ebene ABCD mit der machet, worauf diese einzele senkrecht ist, verhält, wenn man die Wirkungen, welche der Stoß eines Fließigen auf ABCD, in der auf jede der drey Ebenen EFGL, AEFB, AELD, senkrechten Richtung hervorbringt, r, r', r'' sind, und man die Oberflächen der Entwürfe von ABCD, die wir S geheißen, auf diesen drey Ebenen, s, s', s'' nennet, man $R' : r : r' : r'' = S : s : s' : s''$ habe. Weil wir nun $R' = \frac{1}{2}DSG^2 dz \sin^2 i$ gefunden haben: so hat man, wenn aus dieser Reihe von Verhältnissen diese drey

Pro-

Proportionen $R' : r = S : s$, $R' : r' = S : s'$, $R' : r'' = S : s''$ gezogen, und für $R'$ sein Werth gesetzet wird, $r = \frac{1}{2}DsG^2dz\sin^2i$, $r' = \frac{1}{2}Ds'G^2dz\sin^2i$, $r'' = \frac{1}{2}Ds''G^2dz\sin^2i$.

Das heißt: Wenn was immer für eine Ebene ABCD dem Stoße eines Fließigen ausgesetzet ist, und man die Wirkung wissen will, welche dieser Stoß nach einer gegebenen Richtung hervorbringt: so muß man sich vorstellen, diese Ebene sey auf einer andern, auf welcher diese Richtung senkrecht ist, entworfen; sodann den Stoß, welchen die Ebene dieses Entwurfes empfände, wenn sie senkrecht bewegt würde (719 u. vorh.) bestimmen, und ihn mit dem Quadrate des Sinus vom Einfallwinkel des Fließigen auf die wahre Ebene multipliciren.

735. Nach diesen Grundsätzen, kann man die Wirkungen, welche der Stoß oder Widerstand der Fließigen, in einem Körper, nach drey untereinander senkrechten Richtungen hervorbringt, finden: es mag der Körper mehrere verschiedene schiefe Ebenen, oder eine krumme Oberfläche darbieten. Denn in diesem letzten Falle kann man allezeit gedenken, diese Oberfläche sey aus unendlich viel kleinen Ebenen zusammen gesetzet.

---

Von

# Von dem Widerstande eines Körpers, der durch die Umdrehung um seine Achse erzeuget wird.

736.

Bey allen Körpern, die durch Umdrehung einer Ebene erzeuget werden, und sich nach der Richtung ihrer Achse bewegen, ist leicht einzusehen, wenn man sich ihre Oberfläche durch unendlich nahe auf der Achse senkrechte Ebenen in kleine Zonen getheilt vorstellet, daß sich der ganze Widerstand auf der Oberfläche dieser Zone auf eine einzige nach der Achse gerichtete Kraft bringen lasse. Denn stellt man sich vor, es gehen zwey gegeneinander senkrechte Ebenen durch die Achse; und suchet wie oben die auf diesen Ebenen senkrechten Kräfte, welche aus dem Stoße auf jeden Theil derselben Zone entstehen: so sieht man leicht, wegen der regulären Figur der Zone, daß alle senkrechte Kräfte auf jeder dieser Ebenen, einander zernichten.

Was die mit der Achse parallen Kräfte betrifft, die ebenfalls aus den auf die verschiedenen Theile derselben Zone gemachten Stößen entstehen: so ist aus dem vorhergehenden leicht einzusehen, daß sie werden gleich seyn, und um die Achse herum gleich vertheilet werden. Also wird daraus nur eine einzige, nach der Achse gerichtete, Kraft entstehen.

737. Um den Werth dieser Kraft zu finden, so sey AMR (Fig. 297) die krumme Line, welche den

Kör-

Körper erzeugt; so daß Mm die erzeugende Seite der Zone ist. Es ist leicht einzusehen, daß alle Theile der Oberfläche der Zone gegen die Achse AB gleich geneigt seyn, und daß ihre gemeine Neigung durch den Winkel Mmr gemessen werde, welchen die Seite Mm der krummen Linie mit der Ordinate pm machet. Also ist der Einfallwinkel, welchen wir (728) i geheißen, = rMm. Nennet man nun AP, x; PM, y: so hat man Mm: rm oder ds : dy = 1 : sin rMm; folglich sin rMm oder $\sin i = \frac{dy}{ds}$.

Ferner ist leicht einzusehen, daß, wenn man die durch Mm erzeugte Zone auf einer gegen AB senkrechten Ebene entwirft, die Projektion eine Krone MrqomQ (Fig. 298) seyn werde, die zur Breite Mr, und zum Halbmesser PM, Linien, die (Fig. 297) mr und PM gleich sind, haben wird. Weil also die Oberfläche dieser Krone offenbar = Mr × circ PM ist: so ist die Projektion dieser Zone = dy × cir y; oder, wenn man das Verhältniß des Halbmessers zur Circumferenz durch r : c vorstellet, = $\frac{cydy}{r}$. Folglich ist die Kraft oder der Widerstand nach der Richtung der Achse, welcher aus dem Stoße auf die Zone entsteht, = $\frac{1}{2}DG^2dz \times \frac{cydy}{r} \times \frac{dy^2}{ds^2}$, oder $\frac{Dc}{2r} G^2dz \times \frac{ydy^3}{ds^2}$; und der ganze Widerstand, welcher aus dem Stoße auf die ganze Oberfläche des Körpers entsteht, = $\int \frac{Dc}{2r} G^2dz \times \frac{ydy^3}{ds^2}$ oder $\frac{Dc}{2r} G^2dz \int \frac{ydy^3}{ds^2}$. Denn hier ist sonst keine veränderliche Größe, als diejenige, welche von der Figur des Körpers abhangt.

So ist die Rechnungsformel für den Widerstand, welchen die durch Umdrehen erzeugten Körper leiden, da sie nach ihrer Achse beweget werden, beschaffen.

738. Wenden wir diese Formel auf die Kugel an, welche der Körper ist, den man bey der Artillerie am meisten zu werfen pflegt.

Die Gleichung des Zirkels AMB (Fig. 299) der Zeugefläche der Kugel ist $yy = ax - xx$; wenn man Ap, x; AB, a; und PM, y nennet. Daher ist $ydy = \frac{1}{2}adx - xdx$. Zieht man dabey den Halbmesser MC; so geben die ähnlichen Dreyecke Mmr, MPC die Proportion $Mm : mr = MC : CP$, oder $ds : dy = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a - x$. Also ist $\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{1}{2}a-x}{\frac{1}{2}a}$; folglich $\frac{ydy^3}{ds^2} = \frac{(\frac{1}{2}a-x)^3}{\frac{1}{4}a^2}dx$; mithin $\int\frac{ydy^3}{ds^2} = C - \frac{(\frac{1}{2}a-x)^4}{a^2}$. Nun muß, wenn $x = o$ ist, das Integrale o seyn; folglich $C = \frac{1}{16}a^2$. Daher $\int\frac{ydy^3}{ds^2} = \frac{1}{16}a^2 - \frac{(\frac{1}{2}a-x)^4}{a^2}$.

Um den ganzen Werth von $\int\frac{ydy^3}{ds^2}$ zu bekommen, muß man bemerken, daß, wann der Körper nach BA beweget wird, nur die vordere Halbkugel DAE den Stoß empfange. Daher muß man den Werth von $\int\frac{ydy^3}{ds^2}$ nur von A bis C nehmen; das ist, man muß in der Integralgröße, $x = \frac{1}{2}a$ machen. Also hat man $\int\frac{ydy^3}{ds^2} = \frac{1}{16}a^2$; und der Widerstand, welcher zum Ausdrucke $\frac{Dc}{2r}G^2dz\int\frac{ydy^3}{ds^2}$ hat, wird $\frac{1}{2}DG^2dz \times \frac{ca^2}{16r}$.

Der

Der Widerstand, welchen der größte Zirkel DE, in der senkrechten Bewegung empfände, wäre $\frac{1}{2}DG^2dz \times \frac{ca^2}{8r}$; weil des Zirkels Fläche $\frac{ca^2}{8r}$ ist. Folglich ist der Widerstand, welchen die Kugel leidet, die Hälfte von dem, welchen ihr größter Zirkel empfindet. Diesen Satz habe ich selbst durch Versuche genau bestätigt gefunden.

---

# Von der geradlinichten Bewegung der Körper in einem widerstehenden Raume.

## 739.

Der Widerstand, welchen ein im Fließigen bewegter Körper leidet, kann überhaupt zwey Wirkungen hervorbringen. Die erste ist, die Richtung der Bewegung zu ändern, wenn die Richtung, nach welcher die zusammengesetzte von allen auf die Oberfläche gemachten Stößen wirket, mit der Richtung des wirklich bewegten Körpers nicht eine gerade Line ausmachet. Die zweyte, die Geschwindigkeit des Körpers zu ändern.

Da wir hier nur solche Körper untersuchen, deren Theile in Ansehung der Richtung der Bewegung symmetrisch gestellt sind, die durch diese Figur keine Abweichung von der Richtung der Bewegung zulassen: so betrachten wir die Bewegung der Körper in dem widerstehenden Raume nur in Ansehung des Verlusts der Geschwindigkeit, den sie da leiden. Wir werden mit Unter-

suchung der Bewegung schwerloser Körper anfangen; oder, welches eins ist, derjenigen, welche auf einer horizontalen Ebene ohne Reibung, kraft eines empfangenen Stoßes beweget werden.

740. Es sey M des Körpers Masse; g seine am Ende einer beliebigen Zeit z behaltene Geschwindigkeit; s die Ebene, welche gerad bewegt, denselben Widerstand litte, welchen die Oberfläche des Körpers wirklich leidet; D die Dichte des Fließigen: so hat man für die Größe der Bewegung, welche der Körper in der unendlich kleinen Zeit dz verliert, $\frac{1}{2}Dsg^2dz$ (719); und für die Geschwindigkeit, die er in eben dieser Zeit dz verliert, $\frac{Dsg^2dz}{2M}$: welche die Differenz der Geschwindigkeiten von zwey auf einander folgenden Augenblicken ist. Also ist $\frac{Dsg^2dz}{2M} = -dg$. Man giebt dem dg das Zeichen —; weil g abnimmt, da z zunimmt.

Um diese Gleichung zu integriren, muß man sie gleich durch $g^2$ dividiren: dieß giebt $\frac{Dsdz}{2M} = -\frac{dg}{g^2}$; davon das Integrale $\frac{Dsz}{2M} = C + \frac{1}{g}$ ist.

Die Constante C wird durch diese Bedingung bestimmet, daß, wenn G die anfängliche Geschwindigkeit bedeutet, man $g = G$ habe, wann $z = o$. Daher $o = C + \frac{1}{G}$; und $C = -\frac{1}{G}$; mithin $\frac{Dsz}{2M} = \frac{1}{g} - \frac{1}{G}$. Aus dieser Gleichung zieht man leicht den Werth von g, an dem Ende einer gegebenen Zeit z.

Ums

Um ein Beyspiel von der Weise die in diese Gleichung kommenden Größen anzuwenden, zu geben, setzen wir, ein helfenbeinerner Würfel, der einen Zoll zur Seite hat, bewege sich auf einer horizontalen Ebene AB (Fig. 300) nach einer Richtung, die senkrecht auf der Fläche CD ist; und seine anfängliche Geschwindigkeit sey 50 Schuh für 1 Sekunde: man fragt, wie groß seine Geschwindigkeit nach einer halben Sekunde seyn werde.

Also ist $z = \frac{1}{2}''$, $G = 50$ Schuh, $s = 1$ Quadratzoll $= \frac{1}{144}$ Quadratschuh. Was M betrifft; so ist es in der Größe ein Kubikzoll, multiplicirt mit der Dichte des Helfenbeines, die wir durch D′ vorstellen, nämlich $M = \frac{1}{1728} D'$.

Daher ist $\frac{1}{g} - \frac{1}{50} = \frac{\frac{1}{2}D \times \frac{1}{144} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{1728}D'} = \frac{3D}{D'}$. Nun ist $D' : D = 1{,}825 : 1$, oder $\frac{D}{D'} = \frac{1}{1{,}825} = 0{,}548$, folglich $\frac{1}{g} - \frac{1}{50} = 1{,}644$; oder $\frac{1}{g} = 1{,}664$; und $g = \frac{1}{1{,}664} = 0{,}601$; die Geschwindigkeit nämlich nach einer halben Sekunde, nur $\frac{3}{5}$ Schuh mehr, für eine Sekunde.

741. Bestimmen wir nun den in der Zeit z durchlaufenen Raum.

Stellen wir diesen Raum durch x vor; so haben wir $dx = gdz$. Setzen wir für g den erst gefundenen Werth; so haben wir $dx = \frac{MGdz}{\frac{1}{2}DGsz + M}$: wovon die Integralgröße $x = C + \frac{M}{\frac{1}{2}Ds} \log (\frac{1}{2}DGsz + M)$.

Um die Constante C zu bestimmen; so setze man x = c, wenn z = o ist; nämlich o = $C + \frac{M}{\frac{1}{2}Ds} \log M$. Daher $x = \frac{M}{\frac{1}{2}Ds} \log \left(\frac{DGsz}{2M} + 1\right)$.

So hat man im vorhergehenden Beyspiele $x = \frac{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{8} \times D'}{\frac{1}{2}D \times 1\frac{1}{4}\frac{1}{4}} \log \left(\frac{\frac{1}{2}D \times 50 \times 1\frac{1}{4}\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{1\frac{1}{7}\frac{1}{2}\frac{1}{8} \times D'} + 1\right) = \frac{D'}{6D} \log \left(150 \frac{D}{D'} + 1\right)$; und weil $\frac{D}{D'} = 0{,}548$, oder $\frac{D'}{D} = 1{,}825$, $x = 0{,}304 \log 82{,}20$.

Da dieser Logarithm ein hyperbolischer ist; so nehme man aus den Tafeln den gemeinen Logarithm von 82,20, der 1,9148718; multiplicire diesen mit 2,3025851; so hat man 4,4091550; folglich $x = 0{,}304 \times 4{,}4091550 = 1{,}341$ Schuh = 1 Schuh 4 Zoll. Daraus sieht man, daß dieser Würfel bey Zurücklegung eines Raumes, der seiner Länge 16mal genommen, gleich ist, von seiner Geschwindigkeit mehr als $\frac{4}{5}\frac{9}{0}$ verloren habe.

742. Betrachten wir nun die geradlinichte Bewegung schwerer Körper im widerstehenden Raume. Setzen wir anfangs, der Körper steige abwärts. Seine Bewegung wird von zwey Ursachen verzögert; erstlich von dem Widerstande, der durch den Stoß an die kleinen Theile des Fließigen entsteht; zweytens von dem Verluste der Schwere, den er leidet, indem er einen Theil des Fließigen aus der Stelle vertreibt, welcher der Größe nach ihm gleich ist; und der Schwere nach diesen Verlust ausmachet.

Behalten wir die bisher gebrauchten Benennungen: so wird der aus der ersten Ursache entstehende Verlust durch $\frac{1}{2}Dsg^2dz$ ausgedrückt.

Was den zweyten betrifft, so muß man das Gewicht des Fließigen bestimmen, welches den Raum, wie der Körper einnimmt. Nun bey gleicher Größe der Körper sind ihre Massen wie die Dichte. Stellt man die vom festen Körper durch D', und die vom Fließigen durch D vor: so hat man $D' : D = M :$ zur Masse des aus der Stelle vertriebenen Fließigen. Ist nun p die Geschwindigkeit, welche die Schwere einem freyen Körper in 1 Sekunde beybringt; folglich pdz die, welche sie ihm in dem Augenblicke dz beybringt: so hat man $\frac{MD}{D'}$ pdz für das Gewicht des aus der Stelle gejagten Fließigen, oder für die Größe der Bewegung, welche der Körper durch die zweyte Ursache verliert. Also ist der ganze Verlust der Bewegung, den er allen Augenblick leidet, $\frac{MD}{D'}pdz + \frac{1}{2}Dsg^2dz$. Nun erhält er allen Augenblick, die Größe der Bewegung Mpdz. Also bewegt er sich wirklich nur durch eine beschleunigende Kraft, welche in der Größe der Bewegung $Mpdz - \frac{MD}{D'}pdz - \frac{1}{2}Dsg^2dz$ ist, und dem Körper allen Augenblick eine Vermehrung der Geschwindigkeit, welche $= \frac{Mpdz - \frac{MD}{D'}pdz - \frac{1}{2}Dsg^2dz}{M}$ ist, beybringt. Also ist $dg = (1 - \frac{D}{D'})pdz - \frac{\frac{1}{2}Dsg^2}{M}dz$.

Um abzukürzen sey $(1 - \frac{D}{D'})\,p = q$ und $\frac{Ds}{2M} = \frac{q}{k^2}$; so haben wir $qdz - \frac{qg^2}{k^2}\,dz = dg$; oder

$$qdz = \frac{k^2 dg}{k^2 - g^2}.$$

Um diese Größe zu integriren, so verändere man sie in $qdz = \frac{\frac{1}{2}kdg}{k-g} + \frac{\frac{1}{2}kdg}{k+g}$: davon das Integrale $qz = C - \frac{1}{2}k \log (k-g) + \frac{1}{2}k \log (k+g)$ ist.

Setzen wir, um der Leichtigkeit willen, der Körper habe beym Anfang der Bewegung gar keinen Stoß empfangen: so muß die beständige Größe C durch die Bedingung bestimmet werden, daß, wann $z = o$ ist, auch $g = o$ sey. Man hat also $o = C - \frac{1}{2}k \log k + \frac{1}{2}k \log k$; nämlich $C = o$. Also giebt die Gleichung $qz = \frac{1}{2}k \log \frac{k+g}{k-g}$ des Körpers Geschwindigkeit am Ende einer gegebenen Zeit z.

743. Um den in der Zeit z zurückgelegten Raum zu bekommen, so nehmen wir die Gleichung $dx = gdz$: wo dieser Raum durch x vorgestellet wird.

Man muß also aus der vorhergehenden Gleichung den Werth von g herleiten, und ihn hier statt g setzen.

Nun giebt die Gleichung $qz = \frac{1}{2}k \log \frac{k+g}{k-g}$ diese $\log \frac{k+g}{k-g} = \frac{2qz}{k}$; oder $\log \frac{k+g}{k-g} = \frac{2qz}{k} \log e$,

wenn

wenn man durch e eine Zahl vorstellet, deren Logarithmus 1 ist; oder endlich $\log \frac{k+g}{k-g} = \log e^{\frac{2qz}{k}}$. Daher

ist $\frac{k+g}{k-g} = e^{\frac{2qz}{k}}$, und $g = \frac{ke^{\frac{2qz}{k}} - k}{e^{\frac{2qz}{k}} + 1}$; mithin $dx =$

$$\frac{e^{\frac{2qz}{k}} - 1}{e^{\frac{2qz}{k}} + 1} kdz = \frac{kdze^{\frac{2qz}{k}}}{e^{\frac{2qz}{k}} + 1} - \frac{kdz}{e^{\frac{2qz}{k}} + 1} = \frac{kdze^{\frac{2qz}{k}}}{e^{\frac{2qz}{k}} + 1} - \frac{kdze^{\frac{-2qz}{k}}}{1 + e^{\frac{-2qz}{k}}}.$$

Beide Theile des zweyten Gliedes dieser Gleichung sind logarithmische Differentialgrößen. Also ist $x = C'$

$$+ \frac{kk}{2q} \log \left(e^{\frac{2qz}{k}} + 1\right) + \frac{kk}{2q} \log \left(e^{\frac{-2qz}{k}} + 1\right)$$

$$= C' + \frac{kk}{2q} \log \left(e^{\frac{2qz}{k}} + 1\right) + \frac{kk}{2q} \log \left(\frac{e^{\frac{2qz}{k}} + 1}{e^{\frac{2qz}{k}}}\right)$$

$$= C'$$

$$= C' + \frac{kk}{2q} \log \frac{\left(e^{\frac{2qz}{k}} + 1\right)^2}{e^{\frac{2qz}{k}}} = C' + \frac{kk}{q} \log \left(\frac{e^{\frac{2qz}{k}} + 1}{e^{\frac{qz}{k}}}\right).$$

Um die beständige Größe C' zu bestimmen, so merken wir, daß, wann $z = o$ ist, man $x = o$ haben müsse. Daher ist $o = C' + \frac{kk}{q} \log \frac{1+1}{1} = C' + \frac{kk}{q} \log 2$; und $C' = -\frac{kk}{q} \log 2$; und endlich $x = \frac{kk}{q} \log \left(\frac{e^{\frac{2qz}{k}} + 1}{2e^{\frac{qz}{k}}}\right)$.

Diese Gleichung giebt den nach einer gewissen Zeit z zurückgelegten Raum x.

744. Betrachten wir des Körpers Bewegung, wann er aufwärts steigt.

Die Schwere und der Widerstand des Fließigen vermindern alsdann seine Geschwindigkeit. Aber die Schwere ist in diesem Falle, wie im vorhergehenden, so viel

als das Gewicht des Fließigen beträgt, das mit dem Körper gleiche Größe hat, vermindert. Also ist die verzögernde Kraft der Bewegung $Mpdz - \frac{MD}{D'} pdz +$ $\frac{1}{2}Dsg^2dz$; und der Verlust der Geschwindigkeit, welcher dadurch entstehet, $pdz - \frac{D}{D'} pdz + \frac{\frac{1}{2}Dsg^2dz}{M}$. Man hat also $(1 - \frac{D}{D'}) pdz + \frac{\frac{1}{2}Dsg^2dz}{M} = - dg$.

Machen wir, wie oben, $(1 - \frac{D}{D'}) p = q$; und $\frac{\frac{1}{2}Ds}{M} = \frac{q}{k^2}$: so hat man $qdz + \frac{q}{k^2} g^2dz = - dg$.

Daraus zieht man $qdz = \frac{-k^2dg}{k^2 + g^2}$.

Setzen wir $g = ku$: so haben wir $qdz = \frac{-kdu}{1+uu}$, oder $\frac{-qdz}{k} = \frac{du}{1+uu}$. Das zweyte Glied dieser Gleichung drücket das Element eines Zirkelbogens aus, davon die Tangente u und der Halbmesser 1 ist.

Also ist u die Tangente des Bogens, welcher das Integrale von diesem zweyten Gliede ist, oder von seinem Werthe, welcher durch das Integrale des ersten ausgedrücket wird. Daher ist $u = - \text{tang} (\frac{qz}{k} + C) = \frac{g}{k}$; und $g = - k \text{ tang} (\frac{qz}{k} + C)$.

Um die Constante C zu bestimmen, so muß man bemerken, daß, wann $z = o$ ist, g der Geschwindig-

keit gleich seyn muß, mit welcher der Körper anfangs in die Höhe geworfen worden. Diese sey G: so hat man $G = -k \operatorname{tang} C$; folglich $\operatorname{tang} C = -\frac{G}{k}$; oder $C = \operatorname{arc\,tang} \frac{-G}{k}$, das ist, gleich dem Bogen (arc), welcher zur Tangente $\frac{-G}{k}$ hat. Heißet man also den Bogen, welcher zu Tangente $\frac{G}{k}$ hat, A; so hat man $C = -A$. Daher ist ist $g = k \operatorname{tang}(A - \frac{qz}{k})$.

745. Um den zurückgelegten Raum zu bekommen, nehmen wir die Gleichung $dx = gdz$. So haben wir

$$dx = kdz \operatorname{tang}(A - \frac{qz}{k}) = \frac{kdz \sin(A - \frac{qz}{k})}{\cos(A - \frac{qz}{k})}.$$

Diese Größe ist eine logarithmische Differenzialgröße. Folglich hat man $x = C' + \frac{k^2}{q} \log \cos(A - \frac{qz}{k})$.

Was die Constante $C'$ betrifft; so muß sie so beschaffen seyn, daß $x = o$ wird, wann $z = o$ ist. Daher ist $o = C' + \frac{k^2}{q} \log \cos A$; und $C' = \frac{-k^2}{q} \log \cos A$; und endlich $x = \frac{k^2}{q} \log \frac{\cos(A - \frac{qz}{k})}{\cos A}$; der Ausdruck des Raumes für die verflossene Zeit z.

746. Die ganze Höhe zu erkennen, auf welche sich der Körper kraft der gegebenen Geschwindigkeit G heben wird: muß man in der Gleichung $g = k \operatorname{tang}(A - \frac{qz}{k})$, $g = o$ seßen; so ist $A - \frac{qz}{k} = o$. Dieses giebt $x = \frac{k^2}{q} \log \frac{\cos o}{\cos A} = \frac{k^2}{q} \log \frac{1}{\cos A}$.

747. Wir wollen einige Anwendungen von dieser Theorie machen. Nehmen wir z. B. einen von **Newtons** Versuchen, die er im Monat Junius 1710 gemacht hat. **Newton** fand durch den Versuch, daß eine gläserne mit Luft gefüllte Kugel von 4,6932 Zoll im Durchmesser und von 1,0219 Unze Schwere in der Luft (beide Maße auf die von Paris gebracht) durch $206\frac{1}{2}$ Schuh Höhe, in $8\frac{1}{5}$ Sekunde Zeit fiele. Wir wollen also sehen, ob ein schwerer Körper, wegen des Widerstandes der Luft, in $8\frac{1}{5}$ Sekunde nur durch eine Höhe von 206,5 Schuh fallen müsse.

Bestimmen wir erst die Größen q und k. Wir haben $q = (1 - \frac{D}{D'}) p$ gesetzet: worin $p = 30,2$.

Um das Verhältniß $\frac{D}{D'}$ der Dichte der Luft und der gläsernen Kugel zu bekommen, muß man das Gewicht einer Quantität Luft, die der Kugel in der Größe gleich ist, berechnen, und dieses zu dem in der Luft gefundenen Gewichte der Kugel addiren: so hat man das wirkliche Gewicht der Kugel, welches mit dem von gesagter Größe Luft verglichen, das Verhältniß der Dichten geben wird; weil bey gleichen Größen der Körper, ihre Dichten, sich wie ihre Gewichter verhalten.

Die

Die Kugel hatte nun 4,6932 Zoll, oder 0,3911 Schuh im Durchmesser: dieß giebt eine Größe (ein Volumen) von 0,031134 Kubikschuh. Da die Schwere der Luft der 850ste Theil von der Schwere des Wassers ist; und von diesem ein Kubikschuh 70 Pfund, oder 1120 Unzen wiegt: so wiegt ein Kubikschuh Luft $\frac{1120}{850}$ oder $\frac{112}{85}$ Unze, und eine Kugel Luft von gesagtem Durchmesser 0,0413 Unze. Weil die Kugel in diesem Versuche nun, in der Luft von ihrem Grwichte einen Theil verlieren mußte, welcher dem Gewichte der aus der Stelle vertriebenen Luft glech ist: so folget, daß sie im leeren Raume 1,0632 Unzen gewogen. Da nun ein gleiches Volumen Luft 0,0413 Unze wiegt: so ist $D' : D = 1{,}0632 : 0{,}0413 = 10632 : 413$; folglich $\frac{D}{D'} = \frac{413}{10632} = 0{,}0388$. Daher $q = (1 - \frac{D}{D'})\,p = (1 - 0{,}0388) \times 30{,}2 = 0{,}9612 \times 30{,}2 = 29{,}03$.

Was k betrifft: so haben wir $\frac{\frac{1}{2}Ds}{M} = \frac{q}{k^2}$ gesetzet: mithin ist $k^2 = \frac{qM}{\frac{1}{2}Ds}$.

Nun ist M der Kugel mit ihrer Dichte D' multiplicirter Größe gleich. Diese Größe ist = 0,031134 gefunden worden. Folglich ist $M = 0'031134D'$. Daher $k = \frac{q \times 0{,}031134D'}{\frac{1}{2}Ds}$. s gielt hier für die Hälfte der Oberfläche des größten Zirkels der Kugel, welche 0,12028; folglich $s = 0{,}06014$ ist. Also ist $k^2 =$ 0,031134

$$\frac{0{,}03134}{\frac{1}{2}\times 0{,}06014}\times q\times\frac{D'}{D}=\frac{0{,}03134}{0{,}03007}\times 29{,}03\times\frac{1}{0{,}0388}$$
$= 779{,}53$; und $k = 27{,}92$.

Wir haben also $q = 29{,}03$, $k = 27{,}92$, und $z = 8''\frac{1}{5}$.

Man hat also nur diese Werthe in die Gleichung

$$x = \frac{kk}{q}\log\left(\frac{e^{\frac{2qz}{k}}+1}{2e^{\frac{qz}{k}}}\right)$$ zu setzen.

Ehe wir aber diese Substitution machen, wollen wir diese letzte Formel etwas bequemer für die Rechnung einrichten. Setzen wir $e^{\frac{qz}{k}} = N$; so haben wir $e^{\frac{2qz}{k}} = N^2$;

folglich $x = \frac{kk}{q}\log\frac{N^2+1}{2N}$.

Um N zu bekommen, giebt die Gleichung $e^{\frac{qz}{k}} = N$ diese $\frac{qz}{k}\log e = \log N$, oder $\frac{qz}{k} = \log N$. Hat man den Logarithm von N; so ist N leicht zu haben.

Nach dieser Voraussetzung haben wir $\log N = \frac{29{,}03\times 8\frac{1}{5}}{27{,}92} = 8{,}52599$. Da dieser Logarithm hyperbolisch ist; so muß man, um die ihm zugehörige Zahl zu bekommen, ihn durch die Multiplication mit 0,4342945

in

in den gemeinen Logarithm 3,7027795 verwandeln: welchem in den Tafeln die Zahl 5044 zukommt. Daher ist beynahe $N = 5044$.

Da hier **N** eine ziemlich große Zahl ist: so kann man in der Größe $\frac{N^2+1}{2N}$, ohne merklichen Fehler, den Theil 1 gegen $N^2$ vernachläßigen; folglich den Werth von $x$, auf $x = \frac{kk}{q} \log \frac{N^2}{2N} = \frac{kk}{q} \log \frac{N}{2} = \frac{779,53}{29,03}$ log 2522 bringen.

Ich nehme also der hyperbolischen Logarithm von 2522, welcher 7,8328075 ist; multiplicire ihn mit $\frac{779,53}{29,03}$: so finde ich $x = 210,2$ Schuh. Dieses ist von dem Versuche nur ungefähr 3,7 Schuh unterschieden.

Im leeren Raume würde der Körper, in derselben Zeit durch eine Höhe von 1015 Schuh gefallen seyn.

748. In Betreff der Geschwindigkeit, haben wir gesehen, daß sie $g = \frac{ke^{\frac{2qz}{k}} - k}{e^{\frac{2qz}{k}} + 1} = \frac{kN^2 - k}{N^2 + 1}$ ist (743 u. 747). Setzet man hier statt k und **N** ihre vorher gefundenen Werthe: so findet mang $= \frac{((5043)^2-1)\times 27,92}{(5044)^2+1}$ $= 27,92$ beynahe.

749.

749. Der Ausdruck $g = \frac{ke^{\frac{2qz}{k}} - k}{e^{\frac{2qz}{k}} + 1}$, worin $\frac{2qz}{e^{k}}$ stets wächst, wenn die Zeit z zunimmt, zeiget an, daß nach einer gewissen Zeit, die Geschwindigkeit nur unmerklich wachse. Schreibt man wirklich so $g = k\left(\frac{e^{\frac{2qz}{k}} - 1}{e^{\frac{2qz}{k}} + 1}\right)$: so sieht man, daß dieser Werth sich dem $g = \frac{ke^{\frac{2qz}{k}}}{e^{\frac{2qz}{k}}} = k$ stets nähert; so daß die im widerstehenden Raume fallenden Körper ihre Geschwindigkeit, nicht stets, wie im leeren (oder unwiderstehenden) Raume vermehren. Diese Geschwindigkeit kann nie größer als k werden. Und obschon, nach der Strenge, sie diese Geschwindigkeit nur nach einer unendlich großen Zeit erreichen: so ist doch ihre Geschwindigkeit nach einer ziemlich kurzen Zeit, von dieser größten Geschwindigkeit schon wenig unterschieden. Man sieht davon eine augenscheinliche Probe in dem Beyspiele, welches wir berechnet haben, wo der Körper nach Verlauf von $8\frac{1}{5}$ Sekunden, diese größte Geschwindigkeit fast erreichet hat (748).

750. Wir können noch auf eine andere Art die größte Geschwindigkeit bestimmen, welche die im widerstehenden Raume fallenden Körper erlangen mögen. Man darf nur die Differenzialgröße von der Geschwindigkeit $dg = \frac{-\frac{1}{2}Dsg^2}{M}dz$ $(1 - \frac{D}{D'})\,pdz$ $= 0$ seßen: so ist $(1 - \frac{D}{D'})\,pdz = \frac{\frac{1}{2}Dsg^2dz}{M}$; folglich $Mpdz - \frac{MD}{D'}pdz = \frac{1}{2}Dsg^2dz$: wo das erste Glied des Körpers Schwere im Fließigen, und das andere den Widerstand ausdrücket. Also wird die Bewegung gleichförmig; wann der Widerstand des Körpers Gewichte im Fließigen gleich wird: welches so klar ist.

Aus dieser Gleichung ist zu schließen, daß $g^2 = \frac{(M - \frac{MD}{D'})\,p}{\frac{1}{2}Ds} = \frac{(1 - \frac{D}{D'})\,p}{\frac{\frac{1}{2}Ds}{M}} = \frac{q}{\frac{q}{k}} = k^2$, oder $g =$ k sey, wann die Bewegung gleichförmig, oder die Geschwindigkeit am größten, wie oben.

---

Von

# Von der Geschwindigkeit, welche die geworfenen Körper, durch die Wirkung eines verdickerten (condensirten) elastischen Fließigen, wie die Luft oder das entzündete Pulver ist, erlangen können.

## 751.

Die Kraft, welche die in einem bestimmten Raume AB (Fig. 301) verdickerte Luft, durch ihre Ausdehnung gegen einen beweglichen oder fortzuwerfenden Körper **M** ausübet, erzeuget in einer unendlich kleinen Zeit, keine endliche Geschwindigkeit. Die Ausspannung der Federkraft geschieht durch unendlich kleine Stufen; deren Summe binnen einer endlichen Zeit eine endliche Geschwindigkeit ausmachet, mit welcher der Körper fortgeworfen wird.

Weil diese Kraft durch unendlich kleine Grade wirket; so kann sie mit der Schwere der Körper verglichen, folglich durch ein Gewicht gemessen werden. Das Gewicht, mit welchem wir sie vergleichen wollen, ist das von unserer Atmosphäre (Dunstkugel), nämlich von einer Luftsäule, welche zur Grundfläche den größten Zirkel der Kugel M, und zur Höhe die von der Atmosphäre hat. Dieses Gewicht ist bekannt (633).

Setzen wir, dann, **P** sey eine Masse von dem Gewichte, als diese Luftsäule; p die Geschwindigkeit, wel-

che die Schwere in einem freyen Körper, binnen einer Sekunde Zeit erzeuget: so wird Ppdz das Gewicht dieser Säule seyn. Stellet man das Verhältniß dieses Gewichtes zu dem, welches die Federkraft der in dem Raume AB verdickerten Luft misset, durch 1 : q vor: so ist diese Federkraft = Ppqdz.

Setzen wir des beweglichen Körpers M Schwere beyseits, des Stückes Seele AD nämlich horizontal. Setzen wir auch, daß der Körper von demselben Kaliber sey; so daß kein Zwischenraum bleibe; und suchen wir, mit welcher Geschwindigkeit er aus dem Stücke in einen freyen Raum fahren werde.

Betrachten wir ihn, nachdem er in was immer für einen Punkt C der Sele des Stückes gekommen. Da die Federkraft der Luft in dem verkehrten Verhältnisse der Räume ist, die sie einnimmt (634): so muß sich ihre Federkraft, wann sie den Raum AC einnimmt, zu ihrer Federkraft, wann sie den Raum AB einnimmt, nämlich zu Ppqdz, wie AB zu AC verhalten. Nennet man also die Federkraft der in dem Raume AC ausgebreiteten Luft, F: so hat man $F = \frac{AB}{AC} \times pqPdz = \frac{pqPadz}{x}$, wenn man AB, a, und AC, x nennet.

Dieß würde die Beschleunigungskraft des beweglichen Körpers im Punkte C seyn; wenn der Druck der äusern Luft nicht statt fände: da aber diese nach entgegengesetzter Richtung mit einer Kraft = pPdz wirket; so folget, daß die wirkliche Beschleunigungskraft nur $\frac{pqPadz}{x} - pPdz$; folglich die Vermehrung der Geschwindigkeit, welche der Körper in dem Punkte C empfängt, = pqPadz

$\frac{pqPadz}{Mx} - \frac{pPdz}{M}$ sey, wenn des Körpers Masse Mist. Nennet man also seine wirkliche Geschwindigkeit g: so ist das Wachsthum davon $dg = \frac{pqPadz}{Mx} - \frac{pPdz}{M}$; und

$$Mdg = \frac{pqPadz}{x} - pPdz.$$

Um den Werth von g, aus dieser Gleichung zu ziehen, so muß man statt dz den Werth $\frac{dx}{g}$ setzen; und man hat: $\frac{pqPadx}{gx} - \frac{pPdx}{g} = Mdg$; oder $pqP\frac{adx}{x} - pPdx = Mgdg$: dessen Integrale $pqPa \log x - pPx + C = \frac{Mg^2}{2}$ ist.

Um die Constante C zu bestimmen, muß man beobachten, daß, weil man den Anfang der Ausdehnung der Luft bey B gesetzet wo $x = a$ ist, man $g = o$ habe, wann $x = o$ ist. Folglich ist $pqPa \log a - pPa + C = o$; und $C = pPa - pqPa \log a$. Daher ist $\frac{Mg^2}{2} = pqPa \log \frac{x}{a} - pP(x-a)$. Diese Gleichung giebt die Geschwindigkeit in was immer für einem Punkte C der Länge des Stückes.

752. Setzen wir z. B. eine Windbüchse, deren Seele $3\frac{1}{2}$ Schuh Länge hat, sey mit einer bleyernen Kugel geladen, deren 16 auf ein Pfund gehen, und deren Diameter also 0,0524 Schuh hat. Setzen wir ferner, die verdickerte Luft nehme darin 6 Zoll ein; und ihre Dichte sey zu der von der natürlichen Luft, wie 100 zu 1.

Man fragt, wie groß die Geschwindigkeit beym Ausgang aus dem Laufe seyn werde.

Man hat hier a = 6 Zoll = $\frac{1}{2}$ Schuh, x = $3\frac{1}{2}$ Schuh, M = $\frac{1}{16}$, q = 100.

Um P zu bekommen, muß man sich erinnern, daß der Atmosphäre Gewicht dem von einer 32 Schuh hohen Wassersäule gleiche. Weil nun der größte Zirkel der Kugel 0,0524 Schuh im Durchmesser hat: so wird seine Oberfläche 0,00216 Quadratschuh haben; und P = 0,00216 × 32 × 70 = $4\frac{5}{8}$ Pfund beynahe seyn. Nebst dem hat man p = 30,2. Setzet man diese Werthe in die Gleichung der Geschwindigkeit: so hat man $\frac{1}{3\frac{1}{2}}$ g² = 100 × 30,2 × $4\frac{5}{8}$ × $\frac{1}{2}$ log $\frac{3\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$ − 30,2 × $4\frac{5}{8}$ × 3 = 7298 log 7 — 437,9. Der gemeine Logarithme von 7 ist 0,8450980; folglich, wenn man diesen mit 2,30258509 multiplicirt, der dadurch entstehende hyperbolische 1,9459, mit Weglassung der übrigen überfließigen Decimalen. Also ist $\frac{1}{3\frac{1}{2}}$ g² = 7298 × 1,9459 — 437,9 = 13762; und g = 664 Schuh. Also hat die Kugel beym Ausfahren aus dem Laufe eine Geschwindigkeit von 664 Schuh für eine Sekunde.

753. Fragt man um die Länge des Stückes, welche man ihm geben muß, damit es von der Ladung alle mögliche Wirkung empfange: so muß man beobachten, daß, wann die Ladung aufhört zu wirken, alsdann keine Vermehrung der Geschwindigkeit mehr geschehe. Man muß also Mdg = $\frac{pqPadz}{x}$ — pPdz = 0 sezen: woraus $\frac{qa}{x}$ — 1 = 0; oder x = qa ent-

steht

steht; das heißt: Die Länge des Laufes muß sich zu der Länge der Ladung, wie q zu 1, oder wie die Federkraft der Ladung, zu der von der natürlichen Luft verhalten.

754. Will man die Ladung, das ist, wieviel die Luft verdickert seyn müsse, wissen, damit der zuwerfende Körper beym Ausgang aus dem Laufe, eine gegebene Geschwindigkeit habe: so giebt die Gleichung $\frac{Mg^2}{2} = pqPa \log \frac{x}{a} - pP(x-a)$ diese $q = \frac{pP(x-a)+\frac{1}{2}Mg^2}{pPa\log\frac{x}{a}}$.

755. Wenn die Federkraft der Luft und die Länge des Stückes einerley bleiben, und der Luft Masse oder Volumen, welches dem a proportionirt ist, vermehret wird; das ist, wenn man die Ladung vermehrt: so werden die dem Körper mitgetheilten Grade der Geschwindigkeit bey gleicher Weite vom Boden größer seyn; weil überhaupt die Federkraft dem $\frac{a}{x}$ proportionirt ist. Gleichwie aber die Länge der Ladung auf der Länge vom Laufe genommen wird: also bleibt desto weniger für den Raum, in welchem der Körper, des elastischen Fließigen Wirkung empfangen muß; je größer die Länge der Ladung ist. Also muß es für eine gegebene Länge des Stückes, eine Länge der Ladung, oder eine Ladung geben; welche die größte mögliche Geschwindigkeit hervorbringt.

Um diese zu bestimmen, muß man die Gleichung $\frac{Mg^2}{2} = pqPa \log \frac{x}{a} - pP(x-a)$ nehmen; sie differen-

renzieren; g und a allein veränderlich; und dg = o setzen. So hat man $o = pqPda \log \frac{x}{a} - pqPda + pPda$; oder $q \log \frac{x}{a} = q - 1$; und $\log \frac{x}{a} = \frac{q-1}{q}$.

Im vorigen Beyspiele, wo $q = 100$, und $x = 3{,}5$ Schuh ist, wäre also $\log \frac{3{,}5}{a} = \frac{99}{100} = 0{,}99$. Da diese Zahl den hyperbolischen Logarithmen von $\frac{3{,}5}{a}$ ausdrücket; muß man, um die Zahl $\frac{3{,}5}{a}$, mittelst der Tafeln zu erkennen, 0,99 mit 0,4342945 multipliciren; und man hat 0,4299515, welcher mit 2,7 übereinstimmet. Daher ist $\frac{3{,}5}{a} = 2{,}7$; und $a = \frac{3{,}5}{2{,}7} = 1{,}3$; das heißet: die Ladung, welche die größte Geschwindigkeit bey dem Ausgange aus dem Laufe hervorbringt, muß 1 Schuh 3 Zoll 7 Linien lang seyn. Rechnet man, wie in demselben Beyspiele, weiter; so findet man die Geschwindigkeit der Kugel von 770 Sch. für eine Sekunde.

756. Das Flüßige, welches die Entzündung des Pulvers in den Feuergewehren hervorbringt, ist ein elastisches Flüßige, dessen Natur noch nicht vollkommen bekannt ist. Ist es Luft, die in den Materien, welche das Pulver ausmachen, enthalten ist? Ist es aus der kristallisation des Saliters in Dünste aufgelöstes Wasser? Man weis, daß die in den Körpern eingeschlossene Luft,

die

die dazu als ein Urstoff zugehören scheint, darin sich in dem Zustande einer sehr großen Verdickerung (Condensation) befinde. Man weis, daß in Dünste aufgelöstes Wasser, einen Raum einnehmen kann, der fast 16000 mal so groß ist, als der, den es in seinem natürlichen Zustande einnimmt. Vielleicht kommen diese zwey Ursachen in der Kraft des Pulvers zusammen? Es sey nun wie ihm wolle; die durch die Entzündung des Pulvers den Körpern beygebrachte Geschwindigkeit ist die Wirkung der Federkraft eines elastischen Fließigen. Ist diese Kraft der Dichte des Fließigen proportional: so kann die daher entstehende Bewegung durch die vorgetragenen Grundsätze bestimmet werden.

Man muß aber doch beobachten, daß dabey noch andere Betrachtungen zu machen, welche wir unterlassen haben. 1) Der Kugel Gewicht, wann das Stück nicht wagrecht ist. 2) Der Luft Widerstand, indessen die Kugel des Stückes Sele durchläuft. 3) Der Kugel **Spielraum**, und das **Zündloch**, der Kanone, welche zulassen, daß ein Theil dieses elastischen Fließigen entwischet; wodurch seine Wirkung vermindert wird. 4) Die nach und nach entstehende, und nicht augenblickliche Entzündung des Pulvers, welche machet, daß ein Theil vom Pulver durch des Stückes Mündung hinausgeworfen wird, ohne entzündet zu werden; der also nicht in die Rechnung kommen sollte. Aus diesen Betrachtungen können die zwey ersten, die unwichtigsten, leicht in die Rechnung kommen. Die dritte, welche schwerer ist, kann auch hineinkommen. Aber, was die vierte betrifft, so ist noch nicht alles genug bekannt, um sie in die Rechnung zu bringen. Also treiben wir die Untersuchung dieser Frage nicht weiter. Wenn übrigens einige von diesen Betrachtungen nicht zulassen, das Verhältniß der Federkraft dieses elastischen Fließigen zu der Federkraft der natürlichen Luft genau zu bestimmen: so

kann man doch durch gute über den Einfluß einer jeden gemachte Hypothesen, sich versichern, daß dieses Verhältniß sehr groß ist. So hat man sich versichert, daß des Pulvers Kraft über zehn tausend mal so groß, als die Kraft der natürlichen Luft sey.

757. Wir haben in der vorigen Auflösung stillschweigend zum vorausgesetzet, daß das Stück AD unbeweglich, und kein Rücklauf merklich sey. Die Geschwindigkeit würde nicht dieselbe seyn; wenn der Rücklauf beträchtlich wäre: dieses wollen wir sehen.

## Von der Kraft des Zurückstoßes der Luft- und Feuergewehre.

758.

Die Kraft, welche die Kugel forttreibt, ist die Federkraft eines elastischen Fließigen, welches sich inwendig in der Sele des Stückes ausdehnet; wirket also gleich nach allen Seiten (595 u. 630). Zu der nämlichen Zeit, als sie die Kugel forttreibt, muß sie gegen die innern Wände und den Boden des Stückes drücken. Der Druck gegen die innern Wände ist auf allen Seiten gleich; kann keine andere Wirkung haben, als das Stück bersten machen. Was den Druck gegen den Boden betrifft; so ist seine natürliche Wirkung, das Stück nach entgegengesetzter Richtung von der Kugel ihrer, forttreiben. Um die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche daraus für das Stück entstehen kann: so stellen wir folgende Frage.

759.

759. M und m (Fig. 302) sind zwey bekannte Massen, die von einer Feder, a b, welche sich nach einer durch beider Mittelpunkte gehenden Line ausdehnt, nach entgegengesetzter Richtung von einander getrieben werden. Man fragt, wie der Körper Geschwindigkeiten seyn werden, wann sie sich auf eine beliebige Weite von einander entfernt haben.

Ich setze, die Körper befinden sich nach einer gewissen Zeit z, in c und d (Fig. 303); so daß M den Raum ac = t, und m den Raam bd = y zurückgelegt habe. Die Geschwindigkeit von M im Punkte c wird also $\frac{dt}{dz}$ seyn; folglich das Wachsthum dieser Geschwindigkeit $d(\frac{dt}{dz})$; und die in dem Augenblicke dz erlangte Größe der Bewegung $Md(\frac{dt}{dz})$. Die von der Feder in dieser Zeit dz mitgetheilte Kraft sey F × dz oder Fdz. So ist $Fdz = Md(\frac{dt}{dz})$.

Weil die Feder sich auf beiden Seiten gleich ausdehnen muß: so ist, aus derselben Ursache, $Bdz = md(\frac{dy}{dz})$.

Aus diesen zweyen Gleichungen ist zu schließen, daß $Md(\frac{dt}{dz}) = md(\frac{dy}{dz})$; und integrirt, $\frac{Mdt}{dz} = \frac{mdy}{dz}$ sey. Weil diese Gleichung der Bedingung der Frage, daß nämlich die Geschwindigkeiten von m und M zu gleicher Zeit Zero werden, Genügen leistet; so darf man keine beständige Größe beyfügen.

Nennet man also die Geschwindigkeit von M, G und von m, g: so hat man MG = mg.

Um diese Geschwindigkeiten zu bestimmen, brauchet man noch eine Gleichung. Nehmen wir also die zwey Gleichungen wieder her.

$$Fdz = Md\left(\frac{dt}{dz}\right)$$

$$\text{und } Fdz = md\left(\frac{dy}{dz}\right).$$

Multipliciren wir die erste durch $\frac{dt}{dz}$, und die andere durch $\frac{dy}{dz}$; und addiren wir die zwey neuen Gleichungen: so haben wir $Fdt + Fdy = M\frac{dt}{dz}d\left(\frac{dt}{dz}\right) + m\frac{dy}{dz}d\left(\frac{dy}{dz}\right)$.

Nennet man nun den Raum cd, s, und die anfängliche Weite der Körper ab, a; so hat man $s = a + t + y$. Daher ist $ds = dt + dy$; folglich $Fds = M\frac{dt}{dz}d\left(\frac{dt}{dz}\right) + m\frac{dy}{dz}d\left(\frac{dy}{dz}\right)$; und $\int Fds = \frac{1}{2}M\frac{dt^2}{dz^2} + \frac{1}{2}m\frac{dy^2}{dz^2}$; oder $2\int Fds = MG^2 + mg^2$.

760. Um diese Auflösung auf die Frage vom Zurückstoße des Geschützes anzuwenden, muß man voraussetzen, daß m die Masse der Kugel, und M die Masse des Stückes (Fig. 302)

ist

ist. Da F die Federkraft des Pulvers oder des elastischen Flieſsigen ist, welches sich durch die Entzündung ausdehnt und die Kugel forttreibt: so hat man $F = \frac{pqPa}{x} - pP = pP\left(\frac{qa}{x} - 1\right)$, (751); wenn man dieselben Benennungen behält. Allein die Gröſse, welche wir da x genennet, heiſset hier (Fig. 303) s; und die Gröſse a, welche (751) der Ladung Länge bedeutete, bedeutet hier die anfängliche Weite ab. Nach dieser Voraussetzung hat man $F = pP\left(\frac{qa}{s} - 1\right)$; mithin $Fds = pP\left(\frac{qads}{s} - ds\right)$.

Die Gleichung $2lFds = MG^2 + mg^2$ wird also $2pP(qalogs - s) + C = MG^2 + mg^2$. Weil aber beym Anfange der Bewegung, wann $s = a$ ist, $G = o$, und $g = o$ seyn muſs: so ist $C = -2pP(qaloga - a)$. Daher $MG^2 + mg^2 = 2pP(qalog\frac{s}{a} + a - s)$.

Nennet man endlich des Stückes Länge 1, und setzet, daſs, beym Ausgang der Kugel aus der Mündung, die Wirkung aufhört: so hat man $MG^2 + mg^2 = 2pP(qalog\frac{l}{a} + a - l)$. Diese Gleichung giebt mit der $MG = mg$, die Geschwindigkeit der Kugel und des Stückes.

Aus diesen Gleichungen zieht man

$$G^2 = \frac{2mpP}{M(M+m)}\left(qalog\frac{l}{a} + a - l\right)$$

und $$g^2 = \frac{2MpP}{m(M+m)}\left(qalog\frac{l}{a} + a - l\right).$$

So

Setzet man M gegen m sehr groß, welches der Fall der Stücke von großem Kaliber ist; so hat man

$$G^2 = \frac{2mpP}{M^2}\left(qa\log\frac{1}{a} + a - 1\right)$$

und $$g^2 = \frac{2pP}{m}\left(qa\log\frac{1}{a} + a - 1\right).$$

Diese letzte Gleichung ist dieselbe, die wir oben (751) gefunden haben; wie es seyn muß: weil in dem Falle, wo M sehr groß gegen m ist, die Geschwindigkeit des Zurücklaufes sehr klein seyn muß.

Man sieht also aus diesen Gleichungen, daß, wenn des Stückes Masse, mit des abzuschießenden Körpers seiner zu vergleichen ist, und das Stück nicht befestiget wird; die Geschwindigkeit des Wurfes auch von der Masse des Stückes abhange.

761. Um eine Anwendung von dem vorhergehenden zu machen: so wollen wir bey einem 24 pfündigen Stücke, welches mit dem dritten Theile der Schwere der Kugel geladen wird, des Rücklaufes Geschwindigkeit suchen, mit der Voraussetzung, daß des Pulvers Kraft nicht geringer, als das Gewicht der gegen die Mündung Drückenden Luftsäule, tausendmal genommen, sey.

Der Durchmesser einer 24pfündigen Kugel ist 5,444 Zoll. Setzet man 2 Linen oder 0,166 Zoll Spielraum hinzu; so hat man 5,61 Zoll für den Durchmesser der Sele.

Weil ein Kubikschuh Pulver 64 Pfund wiegt: so muß die Ladung, welche 8 Pf. hat, $\frac{1}{8}$ Kubikschuh einnehmen. Da aber die Grundfläche des Zylinders, welchen

chen diese Ladung in der Sele einnimmt, 5,61 Durchmesser hat: so ist dieses Zylinders Läng Zoll. Also ist a = 8,73 Zoll = 0,73 Schuh ist eines 24pfündigen Stückes Länge 9 Schuh 6 Zoll; folglich 1 = 9,5 Schuh. Das Gewicht einer 24pfündigen Kanone beträgt 5400 Pfund. Setzen wir mit der Lavette ihr ganzes Gewicht auf 6500 Pfund: so ist M = 6500 und m = 24. Es ist also nichts mehr als P noch zu suchen.

Nun ist P dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche 32 Schuh zur Höhe, und 5,61 Zoll zum Durchmesser der Grundfläche hat; folglich P = 385 Pfund beynahe. Endlich ist, wie wir gesetzet, q = 1000.

Wir haben also $G^2 = \frac{48 \times 30 \times 2 \times 385}{6500 \times 6524} (1000 \times 0{,}73 \log \frac{9{,}5}{0{,}73} - 9{,}5) = 0{,}013(730 \times 1{,}11440 \times 2{,}3025851 - 8{,}77) = 0{,}013 \times 1864 = 24{,}3$; und G = 5 beynahe; das ist, die Geschwindigkeit des Zurücklaufes, beym Ausgange der Kugel, wäre ungefähr 5 Schuh für die Sekunde.

Was die Geschwindigkeit der Kugel betrifft: so findet man sie eben so $g^2 = \frac{2 \times 6500 \times 30{,}2 \times 385}{24 \times 6524} \times 1864$; folglich g = 1340; das heißt, die Geschwindigkeit der Kugel ist beym Ausfahren aus dem Stücke, 1340 Schuh für die Sekunde.

Man sieht also, daß, wenn man die Wirkung des Pulvers der Wirkung eines elastischen Flüßigen, dessen Federkraft sich wie verkehrt die eingenommenen Räume verhält, gleich setzet, und die Federkraft den ersten

Au-

Augenblick dem 1000 mal genommenen Gewichte einer gegen die Mündung drückenden Luftsäule gleich ist, die 24pfündige Kugel eine Geschwindigkeit von 1340 Schuh für die Sekunde; und das mit der Lavette 6500 Pfund schwere Stück eine Geschwindigkeit von 5 Schuh für die Sekunde erhalte.

762. Bey allen diesem haben wir den Widerstand der Luft nicht mit in die Rechnung gebracht. Doch hat dieser Widerstand einen großen Einfluß in die Wirkung des Rücklaufes. Hat z. B. die Kugel inwendig im Stücke, eine Geschwindigkeit von 1000 Schuh für die Sekunde erlangt: so ist der Widerstand, den sie in dem Augenblicke dz leidet, $\frac{1}{2}Dsg^2dz$, (719). Setzen wir also, s' sey die Oberfläche des größten Zirkels von der Kugel, und $s = \frac{1}{2}s'$: so hat man für diesen Widerstand $\frac{1}{4}Ds'g^2dz$. Nun ist das Gewicht der Kugel, wenn man ihren Durchmesser a, und ihre Dichte D' nennet, $\frac{2}{3}s'aD'pdz$. Also ist der Widerstand zum Gewichte der Kugel $= \frac{1}{4}Ds'g^2dz : \frac{2}{3}s'aD'pdz = \frac{3D}{8D'} \times \frac{g^2}{pa} : 1$. Es ist aber die Dichte der Luft zu der vom Eisen $= 1 : 6000$ beynahe, das ist $\frac{D}{D'} = \frac{1}{6000}$; p $= 30{,}2$ Schuh; $a = 5{,}444$ Zoll $= 0{,}454$ Schuh; und $g = 1000$; folglich der Widerstand zu der Kugel

$$\text{Gewicht} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{6000} \times \frac{1000^2}{30{,}2 \times 0{,}454} : 1 =$$

$$\frac{3000}{48 \times 30{,}2 \times 0.454} : 1 = \frac{3000}{658} : 1 = 4{,}5 : 1;$$

das heißt der Widerstand ist beynahe vier und ein halb mal so groß als das Gewicht der Kugel. Man muß also die Wirkung des elastischen Fließigen vom Pulver betrach-

trachten, daß es nicht gegen eine beständig gleiche Masse der Kugel, sondern gegen eine stets zunehmende Masse wirke. Die Gegenwirkung, die daher gegen des Stückes Boden geschieht, nimmt also auch beständig zu. Obschon die Differenzialgleichungen, welche die Bewegung des Stückes und der Kugel, in Betracht dieser Ursache ausdrücken, leicht zu geben sind: so wollen wir doch uns mit diesen Gleichungen, da sie nicht zu integriren sind, nicht aufhalten.

763. Uebrigens, da die Geschwindigkeit, welche wir hier für die Kugel gefunden haben, auf der Voraussetzung beruhet, daß des Pulvers Kraft tausendmal so groß, als das Gewicht der gegen des Stückes Mündung drückenden Luftsäule sey: so kann man daraus weiter schließen, daß, wenn das elastische Fließige, welches sich durch die Entzündung auflöset, sich nach der von uns gemachten Hypothese ausbreitet, des Pulvers Kraft wirklich größer sey, als wir hier voraussetzen. Denn wir werden sehen, wann wir von dem Widerstande der Luft bey der Bewegung geworfener Körper handeln werden, daß es Würfe gebe, welche zum Anfange eine viel größere Geschwindigkeit als die von 1340 Schuh für die Sekunde, voraussetzen.

764. Nun kommen wir, von der letzten Ursache, nämlich von dem Stoße der Luft, welcher durch das elastische Fließige des Pulvers geschieht, zu reden; welchem man den Rücklauf zuschreiben muß, wann man bloß mit Pulver, ohne Kugel, schießt. Dieser nämlichen Ursache muß man auch das Steigen der Rakete zueigenen. Das in dem Innern des Rakets eingeschlossene elastische Fließige dehnet sich mit einer der Federkraft und der Feinheit der Materie gemäßen Geschwindigkeit aus. Es findet in der Trägheit der Luft einen Widerstand, welcher, wie er immer beschaffen seyn mag, die Wirkung einer Masse, welche

che dieses Fließige fortzutreiben hätte, machet; und folglich den Rücklauf verursachet. Was das Gesetz dieses Widerstandes betrifft; so hängt es von der Geschwindigkeit ab, mit welcher ein in einem Raume eingeschlossenes elastisches Fließige, durch eine gegebene Oeffnung, zu einem andern elastischen Fließigen übergeht; eine Aufgabe, die uns dermalen zuweit von unserm Gegenstande entfernete.

Daraus ist auch zu schließen, daß diese Geschwindigkeit des Rücklaufes, welche indessen entsteht, als die Kugel die Seele des Stückes durchläuft, nicht die ganze Geschwindigkeit des Rücklaufes ist, welche Platz haben wird. Die Wirkung des elastischen Fließigen gegen die Luft nach dem Ausgange der Kugel, muß auch noch was beytragen, diese Geschwindigkeit zu vermehren. Aber es ist sehr schwer die Gränze und Größe dieser Wirkung zu bestimmen.

## Von der Bewegung der in einem widerstehenden Raume geworfenen Körper.

765.

Wir haben oben (274. u. folg.) schon gesehen, daß, wenn ein Körper in einem leeren oder unwiderstehenden Raume geworfen wird, die von ihm beschriebene krumme Line eine Parabel sey; und daß, wenn man nur die Weite eines einzigen unter einem bekannten Winkel gemachten Wurfes weis, man die Weite eines andern, unter was immer für einem Winkel gemachten Wurfes leicht finden könne.

Beym Widerstande des Raumes ist es nicht so: die Krumme ist mehr zusammengesetzt; und aus einer Wurfweite sind die andern nicht so leicht herzuleiten.

766. Obschon die Luft ungefähr 850 mal dünner als das Wasser ist, folglich scheinen kann, daß sie der Bewegung geworfener Körper keinen beträchtlichen Widerstand machen könne: so läßt doch die ungemein große Geschwindigkeit, womit die Körper nach dem Gebrauche der Artillerie geworfen werden, keinen Zweifel über, daß der Widerstand ein beträchtliches Verhältniß gegen die Gewichter dieser geworfenen Körper habe. Daher sieht man deutlich ein, daß es unumgänglich nothwendig ist, darauf acht zu haben, wann man von einer bekannten Schußweite auf eine andere von einer andern Neigung schließen will.

767. Ehe wir die Theorie über diesen Punkt fest setzen, wollen wir sehen, was uns die Erfahrung von diesem Widerstande lehret.

Proben, welche zu Fere, im Jun 1740, mit einem 24pfündigen, mit 9 Pfund Pulver geladenen Stücke gemacht worden.

| Wurfwinkel in Graden. | Beobachtete Schußweiten, in Klaftern. | Für den leeren Raum berechnete Schußweiten. |
|---|---|---|
| 4 | 820 | 467 |
| 15 | 1675 | 1675 |
| 20 | 1740 | 2153 |
| 25 | 1825 | 2566 |
| 30 | 1910 | 2901 |
| 35 | 2020 | 3148 |
| 40 | 2050 | 3300 |
| 45 | 2200 | 3350 |

Die unter 15 Grad gemachte Schußweite ist in die Rechnung genommen worden, als wäre sie im leeren Raume geschehen. Die dritte Columne dieser Tafel gründet sich auf die Formel $b = 4h \sin a \cos a = 2h \sin 2a$ (283 - 289). Setzet man $a = 15$ Grad, und $b = 1675$: so findet man $h = 1675$; und es wird die Formel $b = 3350 \sin 2a$.

Setzet man also nach und nach $a = 20$ Gr. $a = 25$ Gr. u. s. f. so findet man die in der 3ten Columne geschriebenen Zahlen.

Dieß vorausgesetzt; so zeigt die Vergleichung der 2ten und 3ten Columne augenscheinlich, einen beträchtlichen Widerstand von der Seite der Luft. Nur der Schuß unter 4 Graden könnte einen Zweifel erregen: weil die beobachtete Schußweite wirklich größer ist, als die berechnete. Allein dieses kömmt daher; weil die in die Rechnung genommene, unter 15 Graden wirklich zuklein ist: da die im leeren Raume, bey derselben Kraft des Pulvers hätte viel größer seyn müssen; und zwar so groß, daß dadurch nach der Rechnung für 4 Grade noch eine größere Schußweite hätte kommen müssen, als die beobachtete ist. Man kann davon um so viel sicherer seyn; weil die beobachteten unter den größern Winkeln, dennoch alle kleiner, als die berechneten sind.

Es ist also ohne Zweifel, daß der Luft Widerstand die Schußweiten sehr verändere, besonders bey starken Ladungen; so daß aus einer bekannten Schußweite, nach der Hypothese der Parabel, auf eine andere kein sicherer Schluß zu machen.

768. Sehen wir nun, wie die Theorie uns in den Stand setzen kann, von einer bekannten Schußweite auf eine andere von einer andern Neigung einen sichern Schluß zu machen.

Denken wir ARC (Fig. 304) sey die gesuchte krumme Linie, und der Körper beschreibe wirklich den unendlichkleinen Bogen Mm. Ohne Wirkung des Widerstandes und der Schwere beschriebe er in folgendem Augenblicke eine Linie mq, auf der Verlängerung von Mm. Setzen wir, daß binnen diesem Augenblicke der Widerstand ihm um die Größe qn verzögere, und die Schwere ihn um die Größe nm' senke: so wird m' derje-

jenige Punkt ſeyn, wo der Körper im zweyten Augenblicke anlanget.

Ziehen wir qr parallel mit der Vertikale MP, und ns parallel mit der Horizontalen AC. Nennen wir AP, x; PM, y; den Bogen AM, s; und R bedeute den Widerſtand; und p die Schwere des in dem Fließigen bewegten Körpers; nämlich die Geſchwindigkeiten, welche dieſe Kräfte in einer Sekunde erzeugeten, wenn ſie während dieſer Sekunde, allen Augenblick, gleiche Wirkung hervorbrächten. Die Geſchwindigkeiten, die ſie in einem Augenblicke erzeugen, ſind alſo Rdz und pdz.

Denken wir, die Verminderung der Geſchwindigkeit, welche der Widerſtand hervorbringt, und man durch qn vorſtellen kann, ſey in zwey andere zerlegt, deren eine qs vertikal, und die andere qo horizontal iſt: ſo hat man nq : sq = Rdz zu der durch den Widerſtand nach der vertikalen Richtung verurſachten Verminderung der Geſchwindigkeit; und ebenfalls nq : sn = Rdz zu der nach der horizontalen Richtung verurſachten Verminderung der Geſchwindigkeit. Zieht man Mt parallel mit AC; ſo hat man nq : sq : sn = Mm : mt : Mt = ds : dy : dx. Alſo iſt die Verminderung der Geſchwindigkeit nach qs, $\frac{Rdydz}{ds}$ und nach sn, $\frac{Rdxdz}{ds}$. Setzet man die erſte zu der Schwere Wirkung; ſo hat man für die Verminderungen der Geſchwindigkeit, ſo wohl nach der vertikalen als horizontalen Richtung $\frac{Rdydz}{ds} + pdz$ und $\frac{Rdxdz}{ds}$.

Aber ſo lang der Körper Mm beſchreibt, rückt er um die Größe tm = dy parallel mit PM, und um die Größe Mt = dx parallel mit AP fort. Daher iſt die mit PM parallele Geſchwindigkeit $\frac{dy}{dz}$; und die mit AP parallele $\frac{dx}{dz}$. Dieſe Geſchwindigkeiten werden alſo, da ſie zunehmen, ſo lang er mm' beſchreibt $\frac{dy}{dz} + d\left(\frac{dy}{dz}\right)$ und $\frac{dx}{dz} + d\left(\frac{dx}{dz}\right)$; folglich ihre Verminderungen $- d\left(\frac{dy}{dz}\right)$ und $- d\left(\frac{dx}{dz}\right)$ ſeyn. Daher iſt

$\frac{Rdydz}{ds} + pdz = - d\left(\frac{dy}{dz}\right)$, und $\frac{Rdxdz}{ds} = - d\left(\frac{dx}{dz}\right)$.

Dieß sind die zwey Gleichungen, deren Integration die Bewegung und die Krumme bestimmt. Wir wollen einige Anwendungen davon sehen.

769. Wenn der Widerstand null ist: so hat man $pdz = -d\left(\frac{dy}{dz}\right)$, und $o = -d\left(\frac{dx}{dz}\right)$. Diese geben, integrirt, $pz = C - \frac{dy}{ds}$, und $C' = \frac{dx}{dz}$.

Um die zwey Beständigen zu bestimmen, setzen wir, AZ sey die Wurfline, oder Richtung des Wurfes; der Winkel ZAC sey a; und die Geschwindigkeit im Anfang des Wurfes, G: so hat man G cos a für die horizontale, und G sin a für die vertikale anfängliche Geschwindigkeit. Also sind die Beständigen C und C' so beschaffen, daß, wann $z = o$ ist, man $\frac{dx}{dz} = G \cos a$, und $\frac{dy}{dz} = G \sin a$ hat. Folglich ist $o = C - G \sin a$, und $C' = G \cos a$. Daher $pz = G \sin a - \frac{dy}{dz}$, und $G \cos a = \frac{dx}{dz}$.

Integrirt man von neuem: so ist $y = Gz \sin a - \frac{1}{2}pz^2$, und $x = Gz \cos a$. Zu diesen Integralen setzen wir keine Beständigen; weil y und x in dieser Gleichung Zero werden, wann $z = o$ ist; wie es seyn soll. Setzet man in die erste von diesen Gleichungen statt z, seinen aus der zweyten gezogenen Werth; so hat man $y = \frac{x \sin a}{\cos a} - \frac{\frac{1}{2}px^2}{G^2 \cos^2 a}$; oder, wenn man die der Geschwindigkeit G zugehörige Höhe h nennet, $y = \frac{x \sin a}{\cos a} - \frac{x^2}{4h \cos^2 a}$. Diese Gleichungen sind ganz die nämlichen, welche wir für diesen Fall oben (281) gefunden haben.

770. Setzen wir nun, der Widerstand sey dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional; wie er bey den Fließigen ist: so haben wir nach dem, was oben (719) gesagt worden, für die Größe der Bewegung, welche der Widerstand in einem Augenblicke dz zernichtet $\frac{1}{2}DSg^2dz$; und, wenn des geworfenen Körpers Masse M ist, für den augenblicklichen Verlust der Geschwindigkeit, oder für den Werth desjenigen, was wir hier

durch

durch Rdz vorgestellet haben, $\frac{\frac{1}{2}DSg^2dz}{M}$. Daher ist $R = \frac{\frac{1}{2}DSg^2}{M}$. Machen wir $\frac{\frac{1}{2}DS}{M} = \frac{p}{k^2}$, und setzen wir statt g seinen Werth $\frac{ds}{dz}$: so haben wir $R = \frac{p}{k^2} \times \frac{ds^2}{dz^2}$.

Unsere zwey allgemeinen Gleichungen (768) werden also $\frac{pdyds}{k^2dz} + pdz = -d(\frac{dy}{dz})$, und $\frac{pdxds}{k^2dz} = -d(\frac{dx}{dz})$.

Um des Einfachen willen, setzen wir dz beständig; so haben wir $\frac{pdyds}{k^2} + pdz^2 = -ddy$, und $\frac{pdxds}{k^2} = -ddx$.

In die erste von diesen Gleichungen setzen wir statt ds seinen aus der zweyten Gleichung gezogenen Werth: so haben wir $\frac{-dyddx}{dx} + pdz^2 = -ddy$; oder $pdz^2 = \frac{dyddx - dxddy}{dx} = -dx \times d(\frac{dy}{dx})$.

Aber diese Gleichung $\frac{pdxds}{k^2} = -ddx$, mit $k^2dz^2$ multiplicirt, giebt $pdxdsdz^2 = -k^2dz^2ddx$. Setzet man statt $pdz^2$ seinen Werth $-dx \times d(\frac{dy}{dx})$; so hat man $-dx^2d(\frac{dy}{dx})\,ds = -k^2dz^2ddx$. Nun ist $ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}$; folglich $dx^3d(\frac{dy}{dx}) \times \sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})} = k^2dz^2ddx$; oder $d(\frac{dy}{dx}) \times \sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})} = k^2dz^2 \times \frac{ddx}{dx^3}$.

Dieß ist die Gleichung, welche integrirt werden muß, um die von geworfenen Körpern beschriebene krumme Linie zu bekommen.

771. Da dz beständig ist: so ist das zweyte Glied leicht zu integriren; und sein Integrale ist $\frac{-k^2dz^2}{2dx^2}$. Sehen wir, wie das erste integriret werde.

772. Betrachten wir daß $\frac{dy}{dx}$ die Tangente des Winkels ist, welchen die Krumme in jedem Punkte mit dem Horizonte machet. Machen wir $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-tt}$; so ist t die Tangente von der Hälfte dieses Winkels. In der That, nach dem, was in der Geometrie gelehret wird, ist, wenn a was immer für einen Winkel bedeutet, $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$; und $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$; daher $\frac{\sin 2a}{\cos 2a}$ oder $\tang 2a = \frac{2 \sin a \cos a}{\cos^2 a - \sin^2 a}$; oder, wenn man mit $\cos^2 a$ dividirt, $\tang 2a = \frac{\frac{2 \sin a}{\cos a}}{\frac{1 - \sin^2 a}{\cos^2 a}} = \frac{2 \tang a}{1 - \tang^2 a}$.

773. Machen wir, nach dieser Voraussetzung $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-tt}$; so haben wir $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2(1+tt)}{(1-tt)^2} dt$; und $\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \sqrt{\left(1+\frac{4t^2}{(1-tt)^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1+2tt+t^4}{(1-tt)^2}\right)} = \frac{1+tt}{1-tt}$.

Unsere Gleichung wird also $\frac{2(1+tt)^2}{(1-tt)^3} dt = k^2 dz^2 \frac{ddx}{dx^3}$. Daher ist das Integrale des ersten Gliedes $\frac{t+t^3}{(1-tt)^2} + \int \frac{dt}{1-tt}$: welches man auch durch Differenzirung dieses Integrals einsieht.

Nebst dem ist $\int \frac{dt}{1-tt} = \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t}$, folglich $\frac{t+t^3}{(1-tt)^2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+t}{1-t}\right) = C - \frac{k^2 dz^2}{2dx^2}$.

Be-

Bestimmen wir erst die Constante C. Nennen wir den Wurfwinkel I. So haben wir zu Anfang des Wurfes $ds : dx = 1 : \cos I$; folglich $dx = ds \cos I$.

Die erste Geschwindigkeit des Wurfes sey G: so habe wir zu Anfang des Wurfes $ds = Gdz$. Daher ist $dx^2 = G^2 dx^2 \cos^2 I$; und $\frac{dz^2}{dx^2} = \frac{1}{G^2 \cos^2 I}$. Es sey h die Höhe, wovon der Körper im leeren Raume fallen müßte, um die anfängliche Geschwindigkeit G des Wurfes, kraft der Schwere, zu erlangen: so ist $G^2 = 2ph$; und $\frac{dz^2}{2dx^2} = \frac{1}{4ph\cos^2 I}$. Setzen wir diesen Werth in unsere Gleichung; und zugleich statt t, tang $\frac{1}{2}I$: so haben wir $\frac{\tang\frac{1}{2}I + \tang^3\frac{1}{2}I}{(1-\tang^2\frac{1}{2}I)^2} + \frac{1}{2}\log\frac{1+\tang\frac{1}{2}I}{1-\tang\frac{1}{2}I} = C - \frac{Ik^2}{4ph\cos^2 I}$; eine Gleichung, welche den Werth von C giebt.

774. Nehmen wir nun wider unsere Integralgröße her, und setzen wir da statt $dz^2$ seinen Werth aus der Gleichung $pdz^2 = -dxd(\frac{dy}{dx})$; welche, weil $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-tt}$ ist, $pdz^2 = -dx \times d(\frac{2t}{1-tt})$ wird: so haben wir $\frac{t+t^3}{(1-tt)^2} + \frac{1}{2}\log(\frac{1+t}{1-t}) = C + \frac{k^2 d(\frac{2t}{1-tt})}{2pdx}$. Daraus zieht man $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\frac{2t}{1-tt}}{C - \frac{t+t^3}{(1-tt)^2} - \frac{1}{2}\log(\frac{1+t}{1-t})}$.

Dieß ist die Gleichung, welche zu integriren ist, um die von einem geworfenen Körper, in dem stets gleich widerstehenden Raume beschriebene krumme Line zu erhalten.

775. Diese Gleichung kann durch die bekannten Methoden, allgemein nicht integrirt werden. Und die gewöhnlichen Annäherungsarten können hier nicht angewandt werden, auser in dem Falle, wo sie den wenigsten Nutzen haben, wo nämlich

lich die Geschwindigkeit nicht beträchtlich ist. Ist die Geschwindigkeit sehr klein; so ist die Constante C sehr groß: alsdann kann der veränderliche Theil des Nenners vernachläßiget werden; und die Gleichung wird $\frac{2pdx}{k^2} = -\frac{1}{C} d\left(\frac{2t}{1-tt}\right)$.

Bey eben dieser Voraussetzung wird $C = \frac{k^2}{4phcos^2I}$; so daß man $dx = -2hcos^2I \times d\left(\frac{2t}{1-tt}\right)$ bekömmt: davon das Integrale $x = C' - 2hcos^2I \times \frac{2t}{1-tt}$ ist. Ist nun $\frac{2t}{1-tt}$ oder $\frac{dy}{dx} = tang\ I$; so ist $x = o$; daher $o = C' - 2hcos^2I\ tang\ I$; und $C' = 2h\ sin\ I\ cos\ I$; folglich $x = 2h\ sin\ I\ cos\ I - 2hcos^2I \times \frac{2t}{1-tt} = 2hsin\ I\ cos\ I - \frac{2hdy}{dx} \times cos^2I$. Daraus zieht man $\frac{x^2}{2} = 2hxsinI\ cos\ I - 2hycos^2I$; und $4hycos^2I = 4hxsin\ I\ cos\ I - xx$: welches die Gleichung für den leeren Raum ist (291); so daß, wann die Geschwindigkeit sehr klein ist, die krumme Line eine Parabel, wie im leeren Raume, ist.

776. Bey größern Geschwindigkeiten, verwandeln wir erst die Größe $\frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t}$ in eine Reihe; so daß, $\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+t}{1-t}\right) = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + \frac{t^{11}}{11}$, &c. multiplicieren diese Größe mit $(1-tt)^2$; und addiren das Produkte zu dem Zähler des Bruches $\frac{t+t^3}{(t-tt)^2}$: so haben wir.

$$\frac{2t - 2t^3 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{8}{15}t^5 + \frac{8}{105}t^7 + \frac{8}{315}t^9 + \frac{8}{693}t^{11} \ldots\ldots}{(1-tt)^2}$$

Unsere Gleichung wird also $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2t}{1-tt}\right)}{C - \frac{2t - 2t^3 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{8}{15}t^5 \ldots}{(t-tt)^2}}$

$$= \frac{-d\left(\frac{2t}{1-tt}\right)}{C - \frac{2t}{1-tt}\left(1 + \frac{\frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{15}t^4 + \frac{4}{105}t^6 + \ldots\ldots}{1-tt}\right)}$$

777. Wäre nun die Größe $1 + \frac{\frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{15}t^4}{1-tt}$ beständig; oder könnte man sie einer beständigen a gleich setzen, ohne größere Fehler zu begehen, als die sind, welche sich in der Ausübung zutragen: so ließe sich die Gleichung leicht integriren; weil man alsdann $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2t}{1-tt}\right)}{C - \frac{2at}{1-tt}}$ hätte, darin das zweyte Glied ein logarithmisches Differenziale ist. Sehen wir, wie weit man die Größe $1 + \frac{\frac{2}{3}t^2}{1-tt}$ beständig setzen kann.

779. Indem t die Tangente des halben Winkels bedeutet, welchen die krumme Line mit dem Horizonte in jedem ihrer Punkte machet; so ist ihr größter Werth im aufsteigenden Aste, die Tangente des halben Wurf- oder Erhöhungswinkels. Setzen wir z. B. dieser Erhöhungswinkel sey 25 Grad: so ist das Glied $\frac{\frac{2}{3}t^2}{1-tt}$ oder $\frac{2t}{1-tt} \times \frac{1}{3}t$, welches viel größer als das folgende ist, tang $25^\circ \times \frac{1}{3}$ tang $12^\circ\ 30' = 0{,}034$ beynahe. Also veränderte sich die Größe $1 + \frac{\frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{15}t^4 \ldots}{1-tt}$ in dem aufsteigenden Schenkel ungefähr von 1,034 bis 1. Folglich kann man wenigstens bis 25 Grad, ohne großen Fehler, die Größe $1 + \frac{\frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{15}t^4}{1-tt}$ beständig setzen.

779. Um zu wissen, welche beständige Größe am schicklichsten an der Stelle von $1 + \frac{\frac{2}{3}t^2 \ldots}{1-tt}$ zu setzen; so bemerke ich, daß, wann die Geschwindigkeit des Wurfes sehr groß ist, der aufsteigende Ast AC (Fig. 305) beynahe eine gerade Line sey; und daher t seinen anfänglichen Werth, durch die ganze Länge AC beynahe behalte. Die schicklichste Voraussetzung ist also, daß $t = \text{tang} \frac{1}{2} I$ sey.

780. Für die Würfe, welche unter einem Winkel der nicht viel über 25 Grad ist, geschehen, stellet also die Gleichung $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2t}{1-tt}\right)}{C - \frac{2at}{1-tt}}$ die krumme Line, so viel den aufsteigenden Ast betrifft, mit hinlänglicher Genauigkeit vor, wenn $a = 1 + \frac{\frac{2}{3}\text{tang}\frac{1}{2}I + \frac{4}{15}\text{tang}^4\frac{1}{2}I \ldots}{1 - \text{tang}^2\frac{1}{2}I}$ gesetzet wird.

781. Was den absteigenden Ast betrifft; so hat der Fehler, welcher aus unserer Voraussetzung entstehen kann, in diesen keinen so großen Einfluß, als in den ersten: obschon t, nach jenem Punkte D, wo die Neigung der in A gleich ist, stets größer wird. Denn, weil t alsdann negativ wird, so ist der Nenner $C - \frac{2t}{1-tt}(1 + \ldots)$ nicht mehr der Unterschied der zwey Größen, sondern die Summe davon. Daher hat der Fehler dieses Nenners einen so geringern Einfluß in den Werth des Bruches. Wofern also die krumme Line am Ende des Falles E, mit dem Horizonte keinen zugroßen Winkel macht; so kann man die Gleichung $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2t}{1-tt}\right)}{C - \frac{2at}{1-ts}}$ für die Gleichung dieser ganzen Line annehmen.

782. Untersuchen wir umständlicher, was unsere Annäherung für die Schußweiten hervorbringe.

Da der Werth von $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2t}{1-rt}\right)}{C-\frac{2t}{1-tt}(1+\ldots)}$ am Scheitelpunkte, wann t = o iſt, am kleinſten wird: ſo zeiget dieſes an, daß $\frac{2px}{k^2}$ der Unterſchied zwiſchen einer beſtändigen Größe und dem Integrale von $\frac{d\left(\frac{2t}{1-tt}\right)}{C-\frac{2t}{1-tt}(1+\ldots)}$, nämlich

$$\frac{2px}{k^2} = C' - \int \frac{d\left(\frac{2t}{1-tt}\right)}{C-\frac{2t}{1-tt}(1+\ldots)}$$ ſey. Daher wird die Schußweite, nachdem die Annäherung die Größe hinter dem Zeichen $\int$ zu groß oder zu klein angiebt, im Gegentheile zu klein oder zu groß.

783. Wir ſetzen aber in der Größe $\frac{-d\left(\frac{2t}{1-tt}\right)}{C-\frac{2at}{1-tt}}$ für a einen Werth, welcher in dem aufſteigenden Aſte wirklich größer iſt, als der Faktor, an deſſen Stelle es geſetzet wird; folglich die Größe hinter dem Zeichen $\int$ vermehret. Alſo giebt dieſe Annäherung für den aufſteigenden Aſt, die Wurfweiten zu klein an.

784. Bey dem abſteigenden Aſte, wo t verneinend iſt, wird die Gleichung $2px = C' + \int \frac{d\left(\frac{2t}{1-tt}\right)}{C+\frac{2t}{1-tt}(1+\ldots)}$. Da iſt der Werth von a, von B (Fig. 305) bis D, wo die Neigung der in A gleich wird, noch zu groß; folglich der durch die Annäherung für die Schußweite erhaltene Werth noch, zu klein. Aber jenſeits des Punktes D, iſt der Werth von a

zu

zuklein: folglich die Größe hinter dem Zeichen f, und der dadurch erhaltene Werth der Schußweite zu groß.

Allein da die Vermehrung, welche von D bis E geschieht, die Verminderung, welche von A bis D geschieht, nicht ersetzen kann: so folget überhaupt, daß diese Annäherung die Wurfweite zu kurz angäbe; wenn der Werth von C′ genau wäre. Da aber die beständige Größe C′ auch durch die Annäherung bestimmet wird: so ersetzet ihr Werth größten Theils wieder, was die Voraussetzung des Werthes von a unrichtiges einführen könnte; so daß auch bey ziemlich großen Erhöhungswinkeln, die Wurfweiten, bey der Voraussetzung einer gleichförmigen Dichte der Luft, ziemlich genau seyn werden.

785. Geben wir nun dem C und a die zur Zahlrechnung bequemste Gestalt.

Wir haben $a = 1 + \frac{\frac{2}{3}\tang^2\frac{1}{2}I + \frac{4}{15}\tang^4\frac{1}{2}I + \frac{4}{63}\tang^6\frac{1}{2}I \ldots\ldots}{1 - \tang^2\frac{1}{2}I}$

Wir können also dem a diese Gestalt $a = 1 + \frac{2\tang\frac{1}{2}I}{1 - \tang^2\frac{1}{2}I} \times (\frac{1}{3}\tang\frac{1}{2}I + \frac{2}{15}\tang^3\frac{1}{2}I + \frac{2}{63}\tang^5\frac{1}{2}I..)$ geben. Und da $\frac{2 - \tang\frac{1}{2}I}{1 - \tang^2\frac{1}{2}I} = \tang I$ ist: so haben wir $a = 1 + \tang I \times (\frac{1}{3}\tang\frac{1}{2}I + \frac{2}{15}\tang^3 I + \frac{2}{63}\tang^5\frac{1}{2}I...)$.

Was C betrifft, so haben wir oben (773) es, $C = \frac{k^2}{4ph\cos^2 I} + \frac{\tang\frac{1}{2}I + \tang^3\frac{1}{2}I}{(1 - \tang^2\frac{1}{2}I)^2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \tang\frac{1}{2}I}{1 - \tang\frac{1}{2}I}\right)$ gefunden.

Verwandelt man dieß letzte Glied in eine Reihe; und verfährt da, wie wir oben (776 u. folg.) bey t verfahren: so findet man $C = \frac{k^2}{4ph\cos^2 I} + \frac{2\tang\frac{1}{2}I}{1 - \tang^2\frac{1}{2}I}\left(1 + \frac{\frac{2}{3}\tang^2\frac{1}{2}I + \frac{4}{15}\tang^4\frac{1}{2}I + \ldots}{1 - \tang^2\frac{1}{2}I}\right)$, das ist, $C = \frac{k^2}{4ph\cos^2 I} + a\tang I$.

786. Nach dieser Voraussetzung haben wir, $\frac{2pdx}{k^2} = -$

$\frac{d(\frac{2t}{1-tt})}{C - \frac{2at}{1-tt}}$ : davon das Integrale $\frac{2px}{k^2} = C' + \frac{1}{a} \log (C - \frac{2at}{1-tt})$ ist.

Um die beständige Größe C′ zu bestimmen, beobachte ich, daß zu Anfäng des Wurfes, in A (Fig. 305), $x = o$ seyn muß. Da ist aber $\frac{2t}{1-tt} = \text{tang } I$; folglich $o = C' + \frac{1}{a} \log (C - a\,\text{tang}\,I)$; und $C' = -\frac{5}{a} \log (C - a\,\text{tang}\,I) = \frac{1}{a} \log \frac{k^2}{4phcos^2I}$, wenn man für C seinen Werth setzet. Daher

$$\frac{2px}{k^2} = \frac{1}{a} \log \frac{4phcos^2I}{k^2} \left( C - \frac{2at}{1-tt} \right).$$

Nimmt man also e für die Zahl an, deren Logarithmus 1 ist, so hat man

$$e^{\frac{2apx}{k^2}} = \frac{4phcos^2I}{k^2} \left( C - \frac{2at}{1-tt} \right); \text{ und}$$

$$\frac{2t}{1-tt} = \frac{1}{a} \left( C - \frac{k^2}{4phcos^2I} e^{\frac{2apx}{k^2}} \right).$$

Man hat aber $\frac{dy}{dx} = -\frac{2t}{1-tt}$; folglich $dy = \frac{Cdx}{a} - \frac{k^2dx}{4aphcos^2I} e^{\frac{2apx}{k^2}}$.

Integrirt man von neuem, und bestimmet die Constante durch die Bedingung, daß $y = o$ sey, wenn $x = o$ ist: so

hat

hat man $y = \frac{Cx}{a} + \frac{k^4}{8a^2p^2h\cos^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$; oder, wenn man statt C seinen Werth setzet; $y = \left(\tang I + \frac{k^2}{4aph\cos^2 I}\right)x$

$$+ \frac{k^4}{8a^2p^2h\cos^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right).$$

So ist die aus dieser Annäherung entstehende Gleichung beschaffen, wodurch man die Schußweiten von der kleinsten Geschwindigkeit an, bis zu solcher, als die obige Tabelle (767) voraussetzet, wenigstens in dem gleich widerstehenden Raume, finden kann.

787. Wir wollen nun sehen, wie weit diese Theorie mit der Erfahrung zutrifft.

Wir haben durch p die Schwere des in der Luft geworfenen Körpers, oder vielmehr die Geschwindigkeit verstanden, welche er mit seiner um das Gewicht der Luft, deren Stelle er einnimmt, verminderten Schwere, im leeren Raume frey fallend, binnen einer Sekunde Zeit erhält.

Es sey der Durchmesser der Kugel 2r; das Verhältniß des Durchmessers zur Circumferenz 1 : c: so ist der Kugel körperlicher Inhalt oder Volumen $\frac{4}{3}cr^3$. Ist also D die Dichte der Luft, und D′ die Dichte der Kugel: so ist der Kugel Masse $\frac{4}{3}D'cr^3$; und die Masse der Luft von demselben Inhalte, $\frac{4}{3}Dcr^3$.

Es sey p′ die Geschwindigkeit, welche die Schwere einem freyen Körper, in einer Sekunde Zeit, beybringet: so ist p′dz diejenige, welche sie ihm in einem Augenblicke beybringet. Daher ist $\frac{4D'cr^3}{3}p'dz$ der Kugel Gewicht im leeren Raume; und $\frac{4Dcr^3}{3}p'dz$ das dasige Gewicht der Luft von demselben Inhalte; und $\frac{4cr^3}{3}p'dz\,(D'-D)$ das Gewicht der Kugel in der Luft. Dividiret man dieses Gewicht, durch die Masse $4cr^3$

$\frac{4cr^3}{3}D'$ der Kugel; so hat man $pdz\left(\frac{D'-D}{D'}\right)$ für die Geschwindigkeit, welche die Schwere, der Kugel, in der Luft, binen einem Augenblicke der Zeit, beybringet. Also ist $p'dz\left(\frac{D'-D}{D'}\right) = pdz$, oder $p = \frac{D'-D}{D'}p'$.

Die eigenthümliche Schwere der Luft ist der 850ste Theil der Schwere des Wassers. Die Schwere des geschmolzenen Eisens ist zu der Schwere des Wassers $= 7{,}114 : 1$. Daher $D' : D = 6047 : 1$, und $p = \frac{6046}{6047}p'$. Da dieser Bruch von der Einheit wenig unterschieden ist: so nehmen wir $p = p' = 30{,}2$ Schuh $= 5{,}03333$ Klafter an; davon der Logarithmus, $\log p = 0{,}7018556$ ist.

Wir haben $\frac{\frac{1}{2}DS}{M} = \frac{p}{k^2}$ gesetzet; und $S = \frac{1}{2}S'$, wenn $S'$ die Fläche eines größten Zirkels der Kugel ist. Es ist also $S' = cr^2$; und $S = \frac{1}{2}cr^2$. Wir haben gesehen, daß $M = \frac{4}{3}cr^3D'$ ist. Substituiren wir diese Werthe; so haben wir $\frac{\frac{1}{2}DS}{M}$

$$= \frac{p}{k^2} = \frac{3}{8} \times \frac{D}{D'} \times \frac{1}{2r}.$$

Nun haben wir $\frac{D}{D'} = \frac{1}{6047}$; $2r = 5{,}444$ Zoll $=$ $0{,}453666$ Schuh $= 0{,}075611$ Klaftern. Daraus ist $\log \frac{p}{k^2} = 6{,}9139057$ zuschließen.

788. Wir wollen zu erst die Kraft des Pulvers, das ist die Höhe bestimmen; welche der Geschwindigkeit zukömmt, mit welcher die Kugel aus dem Stücke herausfährt.

Der erste Probschuß in der obern Tafel, welcher unter einem kleinen Winkel von 4 Graden geschehen, wäre der schicklichste zu unserm Gegenstande; wenn man sicher wäre, daß die aus dem Stücke fahrende Kugel dieser Richtung von 4 Graden genau folgete. Allein ein kleiner Fehler bey diesem

Win-

Winkel wäre gleich beträchtlich; und könnte ein sehr irriges Maß für die Kraft des Pulvers geben. Der Winkel von 15 Graden ist noch klein genug, daß dabey unsere Rechnung rechtmäßig angewendet werden kann; und zugleich groß genug, daß ein kleiner Unterschied in der Richtung, keine so merkliche Unrichtigkeit in dem Maße der Kraft des Pulvers machen wird.

Wir nehmen also die Schußweite 1675 an, welche unter dem Winkel von 15 Graden gefunden worden. Wir setzen nämlich in dieser Gleichung $y = x\left(\text{tang } I + \frac{k^2}{4aphcos^2 I}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2hcos^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$, $x = 1674$; und $y = 0$; so wird der Werth von h die Größe seyn, welche auch das andere Glied dieser Gleichung null macht; und folgendergestalt gefunden wird.

Wir kennen $\frac{k^2}{p}$; und tang I und cos I sind leicht durch die Tafeln zu finden. Darnach ist

log tang 15° 0′ = 9,4280525.
log cos 15 0 = 9,9849438.
tang 15 0 = 0,26795.
log tang 7 30 = 9,1194291.

Weil nun $a = 1 + \text{tang } I\left(\frac{1}{3}\text{tang}I + \frac{2}{15}\text{tang}^3\frac{1}{2}I + ..\right)$ so fährt man in der Rechnung fort:

log tang $\frac{1}{2}$ I = 9,1194291
Compl. log 3 = 9,5228787
log $\frac{1}{3}$ tang $\frac{1}{2}$ I = 8,6423078
log tang$^3$ $\frac{1}{2}$ I = 7,3582873
log 2 = 0,3010300
Compl. log 15 = 8,8239087
log $\frac{2}{15}$ tang$^3$ $\frac{1}{2}$ I = 6,4832260

Das

Daher ist $\frac{1}{3}$ tang $\frac{1}{2}$ I + $\frac{2}{15}$ tang$^3$ $\frac{1}{2}$ I = 0,04389 + 0,00030 = 0,04419.

Log 0,04419 = 8,6453240
log tang I = 9,4280625

Folglich log tang I ($\frac{1}{3}$ tang $\frac{1}{2}$I + $\frac{2}{15}$ tang$^3$ $\frac{1}{2}$I) = 8,0733765
Die dazu gehörige Zahl ist 0,01184

Daher a = 1,01184; und log a = 0,0051119

Dieß vorausgesetzt, hat man log $\frac{k^2}{p}$ = 3,0860943

Compl. log a = 9,9948881
Compl. log 2 = 9,6989700

Daher Log $\frac{k^2}{2ap}$ = 2,7799524

und Log $\frac{2ap}{k^2}$ = 7,2200474

Log 1675 = 3,2240148

Log $\frac{2ap}{k^2}$ × 1675 = 0,4440624
gehört zu 2,780112

Ferner Log $\frac{k^2}{2ap}$ = 2,7799524
Compl. log 2 = 9,6989700

Log $\frac{k^2}{4ap}$ = 2,4789224
Compl. log cos$^2$ I = 0,0301125

Log $\frac{k^2}{4apcos^2I}$ = 2,5090348

Log $\frac{k^2}{2ap}$ = 2,7799524

log $\frac{k^4}{8a^2p^2hcos^2I}$ = 5,2889872

Daher ist $\frac{k^4}{8a^2p^2cos^2I}$ = 194530,27

Nebst dem ist $\log \frac{k^2}{4apcos^2I} = 2,5090348$

$\log 1675 = 3,2240148$

$\text{Log} \frac{1675k^2}{4apcos^2I} = 5,7330496$

Daher $\frac{1675k^2}{4apcos^2I} = 540816$

Endlich log tang I = 9,4280525

log 1675 = 3,2240148

Log 1675 tang I = 2,6520673

Daher 1675 tang I = 448,415.

Also wird unsere Gleichung $o = 448,815 + \frac{540816}{h} + \frac{194530,27}{h} (1 - e^{2,780112})$.

Nun drücket überhaupt $e^b$ die Zahl aus, welche b zum hyperbolischen Logarithmen hat; und folglich die Zahl, welche $b \times 0,4342945$ zum gemeinen Logarithmen hat. Multiplicirt man also 2,780112 mit 0,4342945; so hat man 1,2073873 für den gemeinen Logarithmen $e^{2,780112}$. Dieser Logarithm gehört nun zu der Zahl 16,120829. Folglich ist $o = 448,815 + \frac{540816}{h} - \frac{195430,27 \times 15,120829}{h}$; oder $o = 448,815 - \frac{2400643}{h}$; und $h = \frac{2400643}{448,815} = 5348,85$ Klafter; und sein Logarithmus, oder log h = 3,7282603.

789. Man sieht also, daß eine 24pfündige Kugel bey einer Ladung von 9 Pfund Pulver, aus dem Stücke, mit einer Geschwindigkeit herausfährt, die der Höhe von 5348,85 Toisen oder 32093 Schuh zugehört. Nun erlangt der Körper, welcher durch diese Höhe, in einem leeren Raume fällt, eine Geschwindigkeit von 1393 Schuh für die Sekunde. Also bringt eine Ladung von 9 Pfund Pulver, einer 24pfündigen Kugel

beym

beym Ausgang aus der Mündung des Stückes eine Geschwindigkeit von 1393 Schuh für eine Sekunde bey.

Hier scheint mir, daß die oben (658) angezeigte Vermuthung bestätiget werde; nämlich, daß die von der Kraft des Pulvers erzeugte Geschwindigkeit, nicht größer, als die von der in einen leeren Raum strömenden Luft, von ungefähr 1400 Schuh für eine Sekunde, seyn könne.

790. Sehen wir nun, was die Theorie für eine Schußweite für 4 und 20 und mehrere Grade Neigung geben werde.

Nehmen wir wieder die Gleichung $y = x\,(\text{tang } I + \frac{k^2}{4aphcos^2I}) + \frac{k^4}{8a^2p^2hcos^2I}\,(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}})$ her; und setzen da wie der beyde Glieder $= o$, $y = o$: so läßt sich $x$ da finden; aber nicht gerad; sondern mit Versuchen, indem man statt $x$ verschiedene Werthe nach und nach an seine Stelle setzet, bis einer davon der Bedingung, daß beyde Glieder o seyn, ein Genügen leistet.

Bezout hat sich dieser Rechnung unterzogen; und folgende Schußweiten gefunden: welchen wir die größten Höhen beyfügen, die nach folgendem § gefunden werden.

| Neigung Gr. Min. | Schußweiten in Versuchen. | Schußweiten beym Widerstand. | Schußweiten ohne Widerstand. | größte Höhe |
|---|---|---|---|---|
| 4 o | 820 Kl. | 862 Kl. | 1489 Kl. | 19,5 Kl. |
| 15 o | 1675 | 1675 | 5349 | 173 5 |
| 20 o | 1740 | 1840 | 6876 | 269 9 |
| 25 o | 1825 | 1956 | 8191 | 376 8 |
| 30 o | 1910 | 2011 | 9265 | 492 |
| 35 o | 2020 | 2038 | 10053 | 614 |
| 40 o | 2050 | 2035 | 10526 | 741,6 |
| 45 o | 2200 | 1992 | 10698 | 869,5 |
| Kernschuß | | | | |
| I II | 300 | 314 | 442 | |

Daß hier noch ein so großer Unterschied zwischen den Versuchen und der Theorie des Widerstandes ist, darf man sich nicht verwundern: da öfters bey derselben Richtung ein Unterschied von 40 bis 50 Klaftern in den wirklichen Schußweiten gefunden wird.

791. Um die größte Ordinate oder Höhe des Schusses zu finden, nehmen wir wieder die Gleichung $y = x\,(\text{tang}\,I + \frac{k^2}{4pah\cos^2 I}) + \frac{k^4}{8p^2a^2h\cos^2 I}\,(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}})$ her; differenziren sie; und setzen ihren Werth $= o$. So ist $o = dx\,(\text{tang}\,I + \frac{k^2}{4aph\cos^2 I}) - \frac{k^2 dx}{4aph\cos^2 I}\,e^{\frac{2apx}{k^2}}$. Daraus zieht man $e^{\frac{2apx}{k^2}} = \frac{\text{tang}\,I + \frac{k^2}{4aph\cos^2 I}}{\frac{k^2}{4aph\cos^2 I}} = (\text{wenn man tang}\,I + \frac{k^2}{4aph\cos^2 I} = b$ setzet) $\frac{b}{\frac{k^2}{4aph\cos^2 I}}$. Daher $\frac{2apx}{k^2}\log e = \frac{2apx}{k^2} = \log \frac{4aphb\,ces^2 I}{k^2}$; und $x = \frac{k^2}{2ax}\log \frac{4aphb\cos^2 I}{k^2}$.

Setzet man diesen Werth von x in die Gleichung von y; so hat man $y = \frac{bk^2}{2ap}\log \frac{4aphb\cos I^2}{k^2} + \frac{k^4}{8p^2a^2h\cos^2 I}\,(1 - \frac{4aphb\cos^2 I}{k^2})$.

Da oben die Werthe von $\frac{k^2}{p}$, a, h, &c. schon bestimmet worden: so sind die von y; welche wir in die Tabelle (790) gesetzet haben, leicht zu finden.

792. Ein Wort von der Zeit.

Wir

Wir haben oben (773) die Gleichung $\frac{t+t^3}{(1-tt)^2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = C - \frac{k^2dz^2}{2dx^2}$ gefunden. Diese, in eine Reihe verwandelt, wie wir oben (776 u. 777) gethan, wird $k^2dz^2 = 2dx^2\left(C - \frac{2at}{1-tt}\right)$. Da wir nun (786) $C - \frac{2at}{1-tt} = \frac{k^2}{4fhcos^2I} e^{\frac{2apx}{k^2}}$ gefunden haben: so ist $k^2dz^2 = \frac{2k^2dx^2}{4fhcos^2I} e^{\frac{2apx}{k^2}}$; oder $dz = \frac{dx e^{\frac{apx}{k^2}}}{cosI\sqrt{(2fh)}}$; folglich $z = \frac{k^2}{apcosI\sqrt{(2fh)}}\left(e^{\frac{apx}{k^2}} - 1\right)$; wenn man eine solche Constante hinzusetzet, daß $z=o$ wann $x=o$ ist.

793. Nach dieser Formel findet man für die obigen Versuche bey der

| Neigung Grad Min. | Die Zeit in der Luft. | Die Zeit im leeren Raum. |
|---|---|---|
| 4 o | $5\frac{2}{5}$ Sek. | $6\frac{2}{5}$ Sek. |
| 15 o | $16\frac{1}{5}$ | $23\frac{9}{10}$ |
| 20 o | 20 | $31\frac{1}{2}$ |
| 25 o | $23\frac{9}{10}$ | 39 |
| 30 o | 27 | $46\frac{1}{10}$ |
| 35 o | $29\frac{7}{10}$ | $52\frac{9}{10}$ |
| 40 o | $33\frac{3}{5}$ | $59\frac{1}{4}$ |
| 35 o | $35\frac{3}{4}$ | $65\frac{1}{5}$ |
| Kernschuß | | |
| I II | $1\frac{9}{17}$ | $1\frac{9}{10}$ |

Bey der Parabel, im leeren Raume, darf man nur die Abscisse wissen. So lange der Körper durch diese Line fällt; so lange dauert der Schuß, im leeren Raume.

794. Will man auch wissen, wie groß, bey diesen Proben, der anfängliche Widerstand der Luft gewesen; so nehme man nur wieder die Gleichung $y = x\left(\text{tang } I + \frac{k^2}{4aphcos^2I}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2hcos^2I}\left(1 - e^{-\frac{2apx}{k^2}}\right)$; setze $y = 14{,}3333$ Schuh $= 2{,}3888$ Klafter, $x = 176{,}5$ Klafter, tang $I = 0$, cos $I = 1$, und $a = 1$; und statt $\frac{k^2}{p}$ den oben gefundenen Werth: so findet man $h = 3646$ Klafter; und die dieser Höhe zugehörige Geschwindigkeit von 192 Kl. oder 1152 Schuh in einer Sekunde. Der Widerstand der Luft, welcher allgemein durch $Dsg^2dz = \frac{p}{k^2} \times g^2dz$ ausgedrückt wird, ist also hier $= 0{,}0010333g^2dz$, oder, weil $g = 192$ Kl. ist, $0{,}0010333g^2dz = 0{,}0010333 (192)^2dz = 38{,}1\ dz$ Klafter.

Nun ist die Geschwindigkeit, welche die Schwere in einem Augenblicke dz mittheilt, $= 30{,}2dz$ Schuh $= 5{,}03dz$ Klafter. Folglich verhält sich der anfängliche Widerstand der Luft zu der Schwere $= 38{,}1 : 5{,}03 = 7{,}6 : 1 = 7\frac{3}{5} : 1$; oder, dieser Widerstand ist $7\frac{3}{5}$ mal so groß, als der Kugel Gewicht.

Weil die Kugel von einer Höhe von 14 Schuh 4 Zoll, oder 2,3888 Klafter gefallen ist, wozu ungefähr eine Sekunde Zeit erfodert wird: so hat der Luft Widerstand die Schußweite von 192 Klaftern, welche im leeren Raume, statt gefunden hätte, ungefähr um $2{,}3888 \times 7\frac{3}{5}$ Kl., oder 18 Klafter verkürzet. Denn man kann annehmen, der Luft Widerstand sey, während einer Sekunde, beynahe gleich groß geblieben. Zieht man nun die Schußweite von $176\frac{1}{2}$ Klafter, welche die Versuche angeben, von 192 Klafter ab; so findet man den Unterschied von $15\frac{1}{2}$ Klafter: welches mit dem vorigen sehr wohl übereinstimmet; weil der Luft Widerstand, während einer Sekunde nothwendig abgenommen haben muß.

Mehreres von dieser Materie findet man in Herrn Bezout Cours de Mathematiques à l'usage de l'Artillerie, T. IV. wie auch in dem kleinen deutschen Traktätchen über die Kugelbahn aus dem Französischen des Herrn Bezout, nebst

1 Kupfertafel, Stutgart bei Joh. Ben. Mezler 1782; worin zugleich der verschiedene Widerstand der Luft, nach der Höhe der Atmosphäre, in Berechnung gezogen wird.

# Von Ricocheten oder Prällschüssen.

795.

Ein **Ricochet** oder **Prällschuß** ist die Bewegung eines geworfenen oder fortgeschossenen Körpers, womit er sich, nachdem er an einen andern angeprället, erhebt, und einen andern, dem ersten ähnlichen, Weg nimmt. Je kleiner der Winkel ist, welchen des geworfenen Körpers Richtung mit dem Horizonte machet; desto leichter, wenn sonst alles gleich ist, springt er wieder in die Höhe, sich so zu bewegen: indem alsdann die Wurfkraft fast ganz nach der horizontalen Richtung wirket; und durch der Luft und andere Widerstände nur nach einer langen Zeit aufgezehret werden kann. Wäre der Körper unelastisch, und die Fläche, an die er prällt, horizontal und unbiegsam; so könnte da kein Ricochet oder Sprung entstehen. Denn des in C (Fig. 306) angekommenen Körpers Geschwindigkeit, nach was immer für einer Richtung MC zerlegte sich in zwey andere; deren eine QC senkrecht auf der Oberfläche wäre, und ganz zernichtet würde; und die andere PC parallel mit der Oberfläche, fortdauerte, und den Körper längst derselben CZ fortbewegte, wenn man der Luft Widerstand und Reibung bey Seite setzt.

796. Findet sich aber in dem Punkte C (Fig. 307) wo der Körper die Oberfläche berührt, eine Erhö-

hung CE : so wird die nach MC gerichtete Bewegung in zwey andere zerlegt; deren eine QC senkrecht auf der Oberfläche CE dieser Erhöhung; und die andere PC nach ihr gerichtet ist, und den Körper nach eben dieser Richtung PE forttreibt; so daß er eine neue ähnliche krumme Line beschreiben kann, als er beschrieben hätte, wenn er aus dem Punkte E, nach CE mit derselben Geschwindigkeit fortgeworfen worden wäre. Er wird sich nämlich auf eine gewisse Höhe erheben; und hernach zu derselben Oberfläche, in einen andern I, zurückkehren : wo er, wenn ähnliche Umstände sind, eine ähnliche Bewegung anfangen kann.

797. Die Präll- oder Sprüngschüsse, wovon wir reden, hängen also von der Lage des Gegenstandes ab, an welchen der bewegte Körper anprällt. Ist aber der Gegenstand biegsam oder beweglich, als die Erde, Wasser, ꝛc. so können da Sprüngschüsse geschehen; wenn auch die Oberfläche vollkommen horizontal wäre. Denn durch die vertikale Geschwindigkeit QC (Fg. 308) trachtet der Körper sich einzugraben, zu versänken; und gräbt sich mehr oder weniger ein, nachdem der Gegenstand beschaffen: wo hingegen mit der Geschwindigkeit PC, er das Erdreich durchwühlt, und eine Furche machet; deren Tiefe so lange zunimmt, als die vertikale Geschwindigkeit QC währet. Ist diese ausgelöscht : so geht er bloß mit der horizontalen fort; drückt die entgegenstehende Materie vor sich zusammen; und wirft sie auf die Seite, um sich einen Weg zu bahnen, wo er den wenigsten Widerstand findet. Bey dieser Durchwühlung wird die Höhle der Furche, in Betracht des Körpers, eben das, was die Oberfläche CE (Fig. 307) im vorigen Falle war. Da nun offenbar der Ausgang, wenn sonst alles gleich, um so viel leichter ist, als der Furche Tiefe kleiner ist; und da diese Tiefe von der vertikalen Geschwindigkeit QC abhängt, die um so viel kleiner, als der Winkel MCP

oder der Wurfwinkel RAZ kleiner ist: so sieht man, wie der Wurfwinkel dadurch, daß er klein ist, die Sprüngschüsse erleichtert.

798. Der Prällschuß hängt auch viel von der Gestalt des geworfenen Körpers ab. Handelt es sich z. B. von einem Prällschuß auf dem Wasser; und der geworfene Körper ist eine Kugel: so muß um einen Prällschuß zu haben, die Geschwindigkeit MC so beschaffen seyn, daß die vertikale Geschwindigkeit QC aufgezehret werde, ehe der vertikale Durchmesser ganz eingetauchet wird. Denn ehe dieser einmal ganz eingetauchet wird, wirket das Wasser auf beiden Seiten der Richtung des Körpers so, daß dieser nicht mehr abgekehret werden kann, auser durch die Wirkung der Schwere, welche für sich den Prällschuß zu verhindern strebt.

799. Da die Versenkung der Kugel nach und nach geschieht: so ist leicht einzusehen, daß wärend derselben, der Mittelpunkt eine krumme Line beschreibt. Denn die Richtung des Widerstands ändert sich allen Augenblick. Z. B. Wenn man, nachdem der Mittelpunkt C (Fig. 309) was immer für eine Bahne PC beschrieben hat, und nach derselben Verlängerung CI sich wirklich zu bewegen trachtet, zwey Tangenten BR, DS denket, die mit dieser Richtung parallel sind: so ist augenscheinlich, daß nur der Theil BVL den Widerstand empfinde; und der ganze nach der Zusammensetzung, eine Richtung CK habe, nach welcher er den Körper über CI zu heben strebt. Denket man sich da ein Parallelogramm CIEK; so ist CE der Weg, welchen der Körper, bey Beyseitsetzung der Schwere, statt CI, für einen Augenblick nehmen wird.

800. Sind beide, der Körper und der Gegenstand, biegsam, elastisch: so kann diese Beschaffenheit auch et-

was zur Erleichterung der Prällschüsse beytragen. Um davon ein Beyspiel zu geben; wollen wir einen ganz einfachen Fall betrachten; den Körper vollkommen elastisch und ohne Schwere annehmen. In dem Augenblicke, wo der nach AC (Fig. 310) geworfene Körper die Oberfläche berührt, zerlegt sich seine Geschwindigkeit in eine horizontale QC, die allezeit dieselbe bleibt, wenn keine Reibung und kein Widerstand des Raumes ist, und in eine vertikale PC, die den Körper zusammen drückt, und nur nach und nach auslischt. Daher ist klar, daß der Mittelpunkt C sich der Ebene HZ nach und nach mit abnehmender Geschwindigkeit nähere, und parallel mit HZ gleichförmig bewege. Stellet man sich also bey jedem Augenblicke, ein Parallelogramm vor, daran sich die horizontale Seite zu der vertikalen verhält, wie die horizontale Geschwindigkeit zu der übergebliebenen vertikalen Geschwindigkeit: so wird des Parallelogrammes Diagonale, welche den Weg des Mittelpunkts für jeden Augenblick bezeichnen muß, allen Augenblick geändert, und eine andere Lage bekommen; so daß der Mittelpunkt C, so lang das Zusammendrücken währet, sich der Line HZ stets nähert, und eine krumme Line beschreibt. Hört das Zusammendrücken auf: so bewegt sich der Mittelpunkt C einen Augenblick lang nach der Tangente, parallel mit HZ. Nach dem dehnt sich die Feder aus, und theilet dem Körper solche Grade der Geschwindigkeit mit, durch die der Mittelpunkt sich von der Ebene auf dieselbe Art zu entfernen trachtet, als er sich derselben, wärend des Zusammendrückens genähert hat; und beschreibt den andern Ast RO der krummen Line, welcher dem ersten RC vollkommen gleich ist. Ist er endlich in dem Punkte O, welcher von HZ um die Größe des Halbmessers I entfernt ist, angelanget; so wird er sich nach der Tangente OT bewegen, welche eben so, wie AC liegt; das heißt: Der schiefe Stoß eines elastischen Körpers gegen eine unbiegsame und unbewegliche Ebene geschieht (bey

Beyseitsetzung der Schwere) so; daß der Rückprallwinkel dem Einfallwinkel gleich ist. Ein jeder von diesen zwey Winkeln wird durch denjenigen gemessen, welchen die Tangenten an den Enden C und O der krummen Line, die der Mittelpunkt während der Zusammendrückung und Ausdehnung der Feder beschreibt, mit der horizontalen Ebene machen. Diese Krumme ist desto kleiner, je kleiner die Zeit dieser Zusammendrückung und Ausdehnung ist.

801. Das Reiben trägt auch etwas bey, zur Erleichterung der Prällschüsse. Denn sie verursachet in dem Körper ein Umdrehen, welches ihn in den Stand setzet, die Hindernisse leichter zu überwinden: wie aus der Lehre vom Reiben einzusehen ist. Dieß sind die vornehmsten Ursachen und Umstände der Ricocheten.

802. Was die Natur der krummen Line, welche der Körper bey seinem Einsenken beschreibt, und das Verhältniß des Einfall- und Rückprallwinkels betrifft; sollte man das Gesetz des Widerstands von dem kennen, in den er sich einsenket. Es sind aber nur die Fließigen, im eigentlichen Verstande, wo man dieß Gesetz kennet. Doch scheinen die Gleichungen, die diese Bewegung in den Fließigen zu bestimmen dienen, nach den bekannten Methoden, keiner Integrirung fähig zu seyn. Daher wollen wir uns in diese Materie weiter nicht einlassen.

---

Von

# Von hydraulischen Maschinen.

803.

Man nennet insgemein eine **hydraulische Maschine** diejenige, welche bestimmet ist, das Wasser auf eine gewisse Höhe zu heben, oder welche durch die Wirkung des Wassers beweget wird. Bisweilen ist eine Maschine bestimmt das Wasser zu heben; die zugleich durch das Wasser beweget wird: diese ist doppelt hydraulisch. Die Wirkung aller dieser Maschinen, läßt sich, wie die von andern nach den bekannten Gesetzen der Mechanik bestimmen.

804. Ohne in die Zergliederung dieser Gesetze hier wieder hineinzugehen, betrachten wir nur, daß die bewegende Kraft allezeit ein durch die Gestalt und das Spiel der Maschine bestimmtes Verhältniß zu der wahren nutzbarn Wirkung habe, welche diese Maschine in Betracht des Gegenstandes, den man beym Bau der Maschine zur Absicht hatte, hervorbringt. Diese Kraft und diese Wirkung können durch bekannte von bekannten Geschwindigkeiten belebte Gewichter vorgestellet werden. Das erste sey K und seine Geschwindigkeit G; das andere Q und seine Geschwindigkeit g. So ist klar, daß die Wirkung Qg die wirkende Kraft KG nicht übersteigen kann. Umsonst bemühen sich gewisse Maschinisten, eine größere Wirkung der bewegenden Kraft, als sie selbst ist, durch Hebel, Räder, und derzleichen Werkzeuge hervorzubringen. Die Hebel haben in sich selbst keine wirksame Kraft. Sie können nur dienen, die zwey Factorn, K und G,

wel-

welche mit einander multiplizirt, die Größe der bewegenden Kraft ausdrücken, zu verändern. Wenn sie das Gewicht der Kraft K vermehren; so vermindern sie die Geschwindigkeit, in demselben Verhältnisse: und umgekehrt, wenn sie die Geschwindigkeit G vermehren; so vermindern sie das Gewicht, in demselben Verhältnisse. Die Wirkung Qg würde der ganzen Bewegungskraft KG gleich seyn; wenn sie nicht zugleich die Reibung überwinden, und andere zur Absicht unnütze Bewegungen in der Maschine hervorbringen müßte. Die beßte Maschine wird diejenige seyn, die vermög ihres Baues und Spieles die Größe Qg der Größe KG am nächsten bringet. Betrachtet man Qg als die ganze Wirkung der Maschine, worin man nicht nur die nutzbare, die man eigentlich zur Absicht hat, sondern auch die unnütze, die Ueberwindung unvermeidlicher Hindernisse begreifet; so ist allezeit Qg = KG.

805. Wir wollen hier nicht die Wirkung aller und jeder hydraulischen Maschinen abhandeln, weil dieses zu weitschichtig würde; sondern davon überhaupt nur so viel sagen, damit dadurch der Leser einige Uebung und Geschicklichkeit erhalte, sich in jeden vorkommenden Fall desto leichter zu finden. Wir wollen zuerst untersuchen, wie man die Kraft des Wassers, eines Stromes, am beßten zur Bewegung der Maschinen anwenden könne. Es ist nichts einfacheres, nichts bequemeres, als eine Maschine mit einem Rade versehen, und dieses durch die Kraft eines Stromes antreiben lassen, und dadurch die Maschine bewegen. Es kann dieses zwar auch durch den Widerstand und die Gegenwirkung des Wassers geschehen, wenn dieses z. B. aus einem beweglichen Gefäße ausströmet, das es zurückstößt, wie man hier im Schönbrunnergarten von Hrn. Hofrath v. **Rempele** verfertiget gesehen: darüber **Dan. Bernouilli** schreibt, und **Joh. Alb. Euler** der würdige Sohn des Vaters,

im

im Jahre 1754 einen Preis von der Akademie zu Göttingen erhalten. Allein wir werden nur von dem allgemeinen, nutzbarn handeln; und zu erst.

# Von den unterschlägtigen Wasserrädern.

## 806.

**Unterschlägtige Wasserräder** sind solche Räder, welche an ihrem Umfange AHLK (Fig. 311) Schaufeln AB, DE, KS, ꝛc. haben, an die, das Wasser unten im Strome, in AB, anstößt. Diese **Schaufeln** sind gemeiniglich länglichte Vierecke, deren **Höhe** AB nach des Rades Mittelpunkte C gerichtet, und deren **Breite** auf des Rades Ebene senkrecht ist. Ich sage **gemeiniglich**: Denn es eräuget sich, daß diese Länge auch nicht nach dem Mittelpunkte gerichtet, und die Gestalt auch anders als so viereckicht ist; wie wir noch sehen werden.

807. Man begreifet leicht, daß die Kraft, deren ein durch den Stoß des Wassers bewegtes Rad fähig ist, von der Schaufeln Lage, Anzahl und Größe, und von dem Verhältniß der Geschwindigkeit des Rades und des Stromes abhange. Wir wollen untersuchen, was diese Elemente alle dazu beytragen, um die Verbindung zu entdecken, welche ihr die größte Häftigkeit, deren sie fähig ist, zuwege bringe.

808. Es sey XYTZ (Fig. 311) ein horizontaler Strom, darin sich alle Theile des Wassers mit gleicher Geschwindigkeit bewegen; und der das Vertikale Rad AHLK,

AHLK, mit rechteckichten, nach dem Mittelpunkte C gerichteten Schaufeln umtreibt; und dadurch ein Gewicht Q hebt, welches an das Ende des Seiles Qghf gebunden ist, das über die unbewegliche Rolle g geht, und sich um den Wellbaum fbd windet. Im Anfang bewegt sich das Gewicht Q mit Beschleunigung; aber nach drey oder vier Umgängen des Rades kommt es zur Gleichförmigkeit; und bleibet hernach allezeit in diesem Zustande. Da muß also die antreibende Kraft des Stromes mit der Last Q und dem Widerstande der Reibung stets im Gleichgewichte seyn. Man sieht daher, daß das Produkt Qg der Last Q in ihre Geschwindigkeit g, nach Abzug der Widerstände, welche stets einen Theil der bewegenden Kraft verzehren, die nutzbare Wirkung der Maschine vorstelle.

809. Was ist nun aber wohl KG bey dem Strome? Was für einem Gewichte K gleichet die Kraft des Stromes? und was für eine Geschwindigkeit bedeutet da G? Es ist gewiß, bey festen Körpern, und überall, wo die Kraft dem Gewichte eines festen Körpers verglichen werden kann, gilt die Gleichung $KG = Qg$, oder der Satz, **die mit ihrer Geschwindigkeit multiplicirte Kraft ist der mit ihrer Geschwindigkeit multiplicirten Last gleich**, nur für den Stand des Gleichgewichts, wo die Geschwindigkeiten unendlich klein sind, und sich wie die Entfernungen der Gewichter vom Ruhepunkte verhalten: ist aber die Geschwindigkeit endlich, oder eine wirkliche Bewegung der Kraft und der Last; so muß $KG > Qg$, die Bewegung der Kraft größer als der Last ihre seyn; wie wir schon im ersten Theile der Mechanik gesehen. So muß auch die bewegende Kraft des Stromes, als ein Produkt KG eines Gewichtes K in eine Geschwindigkeit G betrachtet, dem Produkte Qg der Last Q in ihre Geschwindigkeit, im Stande des Gleichgewichtes, wo die Geschwindigkeiten unendlich klein

sind,

sind, gleich; auser diesem aber, bey der wirklichen Bewegung, ungleich, das ist, größer als Qg, seyn. Es bleibt also zu bestimmen, was ist KG bey dem Strome?

810. Wir haben oben (719) schon gesehen, daß das Gewicht K, welchem die Kraft eines Stromes gleichet, das von einer Wassersäule sey, welche zur Höhe die Höhe des Abfalles und zur Grundfläche die Fläche hat, an welche der Strom senkrecht stößt. Dieß gilt also auch hier (Fig. 311) im Stande des Gleichgewichtes, wo das Wasser senkrecht auf die Schaufel AB stößt. Statt G und g werden aber gesagte Entfernungen (809) gesetzet.

Geschieht aber der Stoß schief auf die Schaufel DE: so vermindert sich das Gewicht soviel, als der gestoßene Theil EV kleiner als die ganze Schaufel ED, und das Quadrat des Sinus vom Einfallwinkel CEO kleiner als das Quadrat vom ganzen Sinus ist (729).

Im ersten dieser zwey Fälle muß man die Schaufel AD, und im andern DE allein gedenken.

811. Beweget sich aber das Rad (Fig. 311) wirklich: so muß Qg < KG, die Größe der Bewegung der Last kleiner als die Größe der Bewegung der Kraft seyn. Immer bleibt diese KG das ist, K und G noch zu bestimmen, wenn auch jene Qg bekannt ist. Bey wirklichen Gewichtern ist die Geschwindigkeit der Last oben (585) bestimmet worden. Multiplicirete man diese mit des Rades Halbmesser, und Dividirete den Quotienten mit dem Halbmesser der Welle; so hätte man die Geschwindigkeit G der Kraft: welches mit dem (425. §.) übereinstimmet; wenn man die Reibung und der Maschine Trägheit bey Seite setzt. Aber noch immer nichts für den Strom.

Insgemein pflegt man für das Gewicht K, welchem die Kraft des Stromes gleich seyn soll, mit welcher er an eine nach des Stromes Richtung bewegte Fläche, senkrecht drücket, die Schwere der Wassersäule anzunehmen, deren Höhe der dem Unterschiede c der Geschwindigkeit G des Rades und der Geschwindigkeit G′ des Stromes zugehörigen Höhe h, und deren Grundfläche der senkrecht gestoßenen Fläche (der Schaufel) S gleich ist. So wäre $G' - G = c$; und $c^2 = 2ph$; folglich $h = \frac{c^2}{2p}$; und $K = Sh = \frac{Sc^2}{2p}$. Wenigstens nehmen dieses **Parent**, **Euler**, **Kästner**, **Karsten**, **Bossut**, **Belidor**, u. a. so an: und ich habe es selbst schon, über 20 Jahre, für richtig gehalten.

Es ist wohl kein Zweifel, wenn die Fläche ihre Geschwindigkeit anders woher, von einer andern Kraft, als von des Stromes seiner, hat, daß die nachdrückende Kraft des Stromes gegen die ihm gleich widerstehende Fläche jenem Ausdrucke gleich, $K = Sh = \frac{Sc^2}{2p}$, sey: indem der Ströme Kräfte überhaupt, wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten sind, und durch die diesen zugehörigen Höhen wirklich vorgestellet werden. Wenn aber einer widerstehenden und entgegendrückenden Fläche, die Geschwindigkeit G, von dem Strome selbst beygebracht wird: so ist es was anders; und ich halte nun dafür, daß die dieser Geschwindigkeit G zugehörige Höhe h′ mit der den Widerstand der Fläche ausdrückenden Höhe h″ der Höhe H des Abfalles vom Strome gleich, $h' + h'' = H$, seyn müsse. Die oben (691) gegebene Analogie von den zwey Gefäßen (Fig. 264) hat mich, nachdem die gewöhnlichen Schlüsse (690) mit der Erfahrung nicht bestehen konnten, auf diese Gedanken gebracht. Ist nämlich die der ganzen Geschwindigkeit des Stromes

zugehörige Höhe oder sein Abfall LT = H; und der Fläche (oder Schaufel) senkrechte Widerstand Sh'' = M × ME dem Gewichte der Wassersäule gleich, deren Höhe ME = h'', und deren Grundfläche die Oeffnung M oder T ist: so muß nothwendig der senkrecht gestoßenen Fläche Geschwindigkeit G sich auf die Höhe LE = h' beziehen; und h' + h'' = H, oder LE + EM = LT seyn; wenn man auf die Reibung und Trägheit der Maschine nicht sieht. Denn es ist hier alles gleich; LT = H dem Abfalle des Stromes, oder LT × T = HS der Kraft des Stromes, M × ME oder L × ME = Sh'' dem Widerstande der Fläche (der Schaufel): so muß auch wohl die Geschwindigkeit der Fläche, der Geschwindigkeit des Wassers in der Oeffnung oder kleinen Röhre TM, die sich auf LE = h' bezieht, gleich seyn. Denn wo einerley Kraft und einerley Widerstand ist; da muß auch einerley Geschwindigkeit, in dem Widerstande seyn. Zudem findet hier auch die Analogie des Stoßes statt, nach welchem zwey Körper mit dem Unterschiede ihrer Bewegungen fortgehen: hiemit stimmt die parentische Hypothese nicht überein; wohl aber unsere Theorie.

812. Man kann demnach die größte Wirkung eines Stromes, mittelst eines unterschlägtigen Wasserrades, nicht finden, wie Hr. Parent (Memoires de l'Academie de Paris 1704) erfunden hat; und welchem, Belidor, Bossut, ꝛc. und ich selbst bisher gefolget: wornach die Auflösung ungefähr folgende ist.

Es sey des Stromes ganze Geschwindigkeit (Fig. 312) AB = a; der senkrecht gestoßenen Fläche oder Schaufel ihre CB = x; mithin des nachstoßenden Wassers seine AC = a — x; und dieser Nachdruck wie $AC^2 = (a-x)^2$; mithin des Stromes Wirkung $AC^2 \times CB = (a-x)^2 x = a^2x - 2ax^2 + x^3$; und, wenn diese die kleinste oder größte seyn soll, $a^2dx - 4axdx + 3x^2dx = 0$; daher $x = \frac{2}{3}a \pm \frac{1}{3}a$; das heißt: es sey die größte Wirkung, wenn des Rades Geschwindigkeit = $\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}a$, einem Drittel der

Ge-

Geschwindigkeit des Stromes gleich ist: und die kleinste, oder gar keine, wenn des Rades Geschwindigkeit $= \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a = a$, des Stromes seiner gleich ist; weil alsdann $AC = o$, und $AC^2 \times CB = o$ ist: woraus folgete, daß bey der grösten Wirkung, der Schaufel Widerstand sich zu der Kraft des Stromes, wie $\frac{4}{9}aa : a^2 = 4 : 9$ verhalten müßte. Von dieser Entdeckung, sagt Belidor in seiner Wasserbaukunst I. 592. sie sey werth, daß sie als eine der allerwichtigsten angesehen werde, die seit der Erneuerung der Wissenschaften und guten Künste erfunden worden. Und wer wird wohl eine solche Entdeckung nicht schätzen, wodurch so nützliche Maschinen auf das beßte können eingerichtet werden. Allein diese Bestimmung, wie nun gesagt, kann nicht bestehen: weil die Wirkung so, nämlich durch das Produkt $AC^2 \times CB$ nicht ausgedrücket werden kann (811).

813. Wandeln wir aber auf ähnlichen Gründen fort: so können wir die Höhe H des Falles vom Strome, worauf sich seine Geschwindigkeit G' bezieht, durch die Line $LT = a$ (Fig. 313); und die Höhe h', worauf sich die Geschwindigkeit der senkrecht gestoßenen Fläche der Schaufel bezieht durch den Theil $LE = x$ der Line LT; und die Last oder der Schaufel Widerstand durch den Rest $ET = a - x$ der Line LT vorstellen. Mithin ist des Stromes oder der Maschine Wirkung, wie $ET.\sqrt{EL} = (a-x)\sqrt{x}$. Soll diese die größte seyn, die möglich ist: so muß $d(a-x)\sqrt{x} = o$; oder $d(a-x)^2x = a^2dx - 4axdx + 3x^2dx = o$; daher $x^2 - \frac{4ax}{3} = -\frac{a^2}{3}$; und $x = (\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3})a$ seyn; das heißt:

Die Wirkung ist am größten; wenn der Abfall für die Geschwindigkeit des Rades $x = \frac{1}{3}a$ dem dritten Theile des Abfalles a der Geschwindigkeit des Stromes gleich ist: und am kleinsten oder null; wenn der erste Abfall dem letzten gleich ist.

Daher muß bey der größten Wirkung, die Geschwindigkeit der Fläche der Schaufel zu der Geschwindigkeit des Stromes, sich wie $1 : \sqrt{3} = 1 : 1{,}7320$ verhalten.

814. Das Gesagte von der Wirkung des Stromes mittelst eines unterschlägtigen Wasserrades gilt nur bey der augenblicklichen Stellung der Schaufel, solang der Strom senkrecht auf sie stößt. Wie ist nun die Wirkung bey ihrer schiefen Stellung, da der Strom auf sie schief stößt?

Wir wollen zu dieser Absicht die 311te Fig. betrachten; und sehen, was für ein Unterschied der Wirkung gegen den Theil EV der schiefen Schaufel DE, und gegen den Theil AO der senkrechten Schaufel AB, an die gleich viel Wasser stößt, sey. Setzen wir die beiden Linen RM und rm horizontal und einander unendlich nahe. So ist die Wirkung gegen Rr, wie $Rr \times RC$; und gegen Mm, wie $Mm \times \sin^2 CMR \times MC = (\text{da } Mm = \frac{Rr.MC}{RC}, \text{ und } \sin CMR = \frac{RC}{MC} \text{ ist})$ $\frac{Rr.MC}{RC} \times \frac{RC^2}{MC^2} \times MC = Rr \times RC$; das ist, beide Wirkungen gegen Rr und Mm sind gleich.

Da nun bey beiden Wirkungen, sowohl in Mm als in Rr, der Hebelarm RC ist: so ist beyderseits, sowohl in Mm als in Rr, die horizontal gerichtete Kraft wie Rr, nämlich gleich. Man sieht dieses auch; wenn man beiderseits die Kraft ohne Hebelarm betrachtet. Denn so ist die in Rr, wie Rr; und die in Mm, wie $Mm \times \sin^2 CMR = Rr \times \frac{MC}{RC} \times \frac{RC^2}{MC^2} = Rr \times \frac{RC}{MC}$, senkrecht auf Mm, oder nach My gerichtet. Stellet man

die-

diese Rr $\times \frac{RC}{MC}$ durch My vor; und betrachtet sie als zusammengesetzt aus ME, die der Speiche CM Richtung hat, und aus Mx, die horizontal ist: so hat ME keinen Einfluß in die Wirkung des Rades; und die horizontale, Mx, die einen hat, ist Rr $\times \frac{RC}{MC} \times \frac{MC}{RC}$ = Rr.

Also ist dann die Wirkung des Stromes gegen den Theil EV der schiefen Schaufel DE, der Wirkung gegen den damit übereinstimmenden Theil AO der senkrechten Schaufel AB vollkommen gleich; auch da am größten, wenn sie hier am größten ist.

Man wird vielleicht hiergegen einwenden; und sagen: In dieser Auflösung ist weder die Geschwindigkeit des Rades noch die vom Strome, und zwar weder seine absolute oder ganze, noch seine respektive, womit er an das Rad stößt, in Betrachtung gezogen worden; wie doch Bossut und andere gethan haben. Allein wir haben (812) schon gehört, daß die Gründe, nach welchen diese Autorn rechnen, nicht bestehen können, und diese Rechnungen schon daher unrichtig sind. Wir wollen aber auch setzen, das Rad bewege sich; und sehen, ob dadurch die Kraft bey der schiefen Schaufel in Mm anders als die bey der senkrechten in Rr werde.

Wenn sich die Kraft da ändern sollte: so müßte dieses daher kommen, daß die horizontale Geschwindigkeit des Punktes M der schiefen Schaufel größer als die vom Punkte R der senkrechten Schaufel wäre; wir wollen sie suchen.

Es sey des Punktes R Geschwindigkeit Rt, und des Punktes M seine My, die beide senkrecht auf den Halbmessern CB, CE des Rades sind; und davon die erste Rt auch horizontal ist. Zerlegen wir die zweytt My in die horizontale Mz und vertikale yz Geschwindigkeit. Da ist nun Mz : My = RC

$= RC : MC$; mithin $Mz = \frac{My \times RC}{CM} \times \frac{Rt \times CM \times RC}{RC \times MC} =$

Rt, die horizontale Geschwindigkeit im Punkte M, der im Punkte R gleich.

Welche Zerlegung wird nun gelten? Wird wohl eine andere, aus welcher absurda folgen, die ich Kürze wegen übergehe, mehr gelten, als diese? Ich zweifele nicht, daß gegenwärtige Zerlegung gewiß die wahre ist: weil indessen der Punkt M sich durch die Line My beweget, er durch die senkrechte zy hinabsteigt, folglich horizontal keine andere Bewegung als Mz haben kann.

Wenn auch die Speiche CE in die Lage Ce kommt: so ist doch weder des Punktes M noch eines andern Ausweichung, Mx. Es ist ungefähr der Punkt V, welcher in x kommt: und es giebt schon der Augenschein, daß seine horizontale Bewegung gewiß nicht Mx ist. Nur von der Ausweichung eines Punktes ist die Rede: die man bloß durch diese Zerlegung erkennet; wenn man eine anwenden will.

Mein Grund, warum ich die Geschwindigkeit nicht betrachtet, oder überall gleich angenommen habe, ist dieser: weil das Moment der horizontalen Kraft in M, dem in R vollkommen gleich ist; so muß auch, die horizontale Geschwindigkeit in M der in R vollkommen gleich seyn. Denn ein allgemeiner, unbezweifelter Satz ist, daß, wenn die Kräfte und ihre Momente gleich sind, sich ihre Geschwindigkeiten, im Falle der Bewegung wie ihre Entfernungen vom Ruhpunkte verhalten müssen; welche hier für beide gleiche Kräfte in M und R, RC sind.

815. Wir sehen daher, daß es desto besser für die Wirkung des unterschlägtigen Wasserrades ist; je mehr Schaufeln es hat. Denn stehen zwey Schaufeln, z. B. AB und DE so; daß die Vertikalline ihren Winkel ECB halbiret: so ist so viel Kraft oder Wirkung verloren, als der Strom auf dem Quersine des halben Bogens EB, wenn er eine physische Line oder Fläche wäre, hervorbringen könnte; wie leicht ein zusehen, wenn man sich

die

die Figur so einbildet. Also muß es wohl besser seyn; wann mehrere Schaufeln als wenige sind: und zwar je mehr; je besser.

Indessen sollen doch nicht unendlich viel seyn; nicht so viel, daß ihre äusere Oberfläche eine zylindrische Fläche SEB bilde. Denn da würden keine Schaufeln mehr seyn; gegen die Voraussetzung: und das Wasser könnte nicht mehr gegen Flächen stoßen, welche die Richtungen der Halbmesser vom Rade hätten; wie doch vorausgesetzet worden.

Auch wird erfodert, daß das Wasser hinter dem Rade gleich wegfalle, und da keine Hinderniß mache: die bey mehrern Schaufeln wohl größer werden kann, als bey wenigen.

816. Eine vortheilhafte Einrichtung des unterschlägtigen Wasserrades wäre also diese: 1) recht viel Schaufeln zu machen, jedoch so, daß auch die Dicke der Schaufeln keine Minderung der Kraft verursache; daher 2) diese so dünn zu machen, als möglich ist; uud 3) die Rinne nach dem senkrechten Durchmesser des Rades gleich abzuschneiden.

Es würde also ein großer Fehler seyn, die Schaufeln (Fig. 314) so weit zu machen, daß, wann eine AB senkrecht stünde, die nächste DE just die Oberfläche des Stromes berührete; wie Belidor angegeben, daß es seyn soll: wie auch, die Rinne nach dem vertikalen Durchmesser des Rades noch horizontal fortgehen zu lassen.

817. Nach dem 815. §. können wir auch leicht die größte und kleinste Wirkung bey demselben unterschlägtigen Rade finden. Die größte ist nämlich, wann eine

Schaufel AB (Fig. 314) im Strome senkrecht steht; und die kleinste, wann zwey Schaufeln AB und DE so stehen, daß ihr Winkel ECB von der Vertikale halbiret wird: wo man also nur suchen darf, wie viel die Wirkung kleiner ist; wenn man die Schaufel AB, um soviel, als der Quersin des halben Winkels ECB beträgt, unterhalb, bey B, mindert. Diese so verminderte Wirkung ist die kleinste.

818. So können wir dann, die mühsamen Rechnungen die Bossut, hierüber gemacht hat, ersparen. Doch wollen wir noch seine schönen Versuche in dieser Materie, wenigstens zum Theile betrachten.

Er hatte nämlich ein Rad gewählt, wie ungefähr die 311te Fig. vorstellet; wo er 12, 24 und auch 48 Schaufeln, nach seinem Belieben anbringen konnte; das im Durchmesser ungefähr 3 Schuh war, und 5 Zoll breite Schaufeln hatte; und nach umständen ein Gewicht Q von 12, 16 und mehrern Pfunden hob. Ich will davon nur anmerken, daß das Rad mit 48 Schaufeln die größte Wirkung; und das mit 24 Schaufeln mehr Wirkung als das mit 12 Schaufeln machte: welches dann mit unserm Satze (815) übereinstimmet.

Zweytens hat er noch ein Rad gebrauchet, wie die 315 u. 316te Figuren vorstellen: davon wir einige Versuche betrachten wollen.

Bey diesem Rade sind BGFH hbgf die Friese der zwey eisernen Kränze, deren Breite Bb, 9 Linen, und Dicke 1 Line beträgt. Die Schaufeln sind von Eisenblech, und haben ungefähr $\frac{1}{2}$ Line Dicke. Das eine Ende jeder Schaufel ist mittelst eines kleinen eisernen Nagels zwischen beiden Kränzen angemacht; und das andere wird von zwey Eisenstänglein gehalten, die an das um

den

den Mittelpunkt C bewegliche Röllchen angemacht sind. Dadurch kann man die Schaufeln entweder nach dem Mittelpunkte richten, oder ihnen gegen den Halbmesser eine Neigung geben, wie man will. Man kann auch, wenn man will, einen Theil der Schaufeln wegnehmen.

Was die Maße betrifft, so ist der größte Durchmesser BF von 3 Schuh; die Breite der Schaufeln, von 5 Zoll; ihre Höhe BA 6 Zoll; der Durchmesser des blossen Zylinders, worauf sich das Seil COQ windet, welches das Gewicht Q trägt, 2 Zoll 6 Linen, der Durchmesser der Rolle, 3 Zoll 8 Linen; die Zapfen von Rade im Durchmesser 3 Linen. Die von der Rolle $2\frac{2}{3}$ Linen; der Durchmesser des Seiles, 2 Linen; so daß der Hebelarm vom Gewichte Q, 1 Zoll 4 Linen beynahe beträgt.

Da das Rad, in einer gewissen Anzahl Sekunden, nicht allezeit eine ganze Zahl von Umläufen macht: so ist noch eine Wälle mit einem kleinen Sperrrade angebracht, welches mittelst eines Schnellers dienet, die Maschine in dem Augenblicke, als man will, aufzuhalten. Diese Maschine wiegt in allem, das ist, alle Theile des Haupt- und Sperrrades, 44 Pfund. Sie kann zu verschiedenen Versuchen angewendet werden.

819. Ich will gleich die ersten Versuche, die Bossut mit diesem Rade gemacht hat, daher setzen.

Diese geschahen auf einem Strome, zwischen zwey parallelen Mauern, die 12 bis 13 Schuh von einander waren. Das Bette dieses Canals ist ziemlich eben; und die Tiefe des ganzen Wassers ungefähr 7 bis 8 Zoll. Das Gerüst der Maschine wurde von starken Bolen getragen, die eine Art von Brücken über den Bach machten. Und es war kein Gegenstand, welcher die Wirkung

des Stromes gegen die Schaufeln stören konnte. Die Schaufeln giengen senkrecht 4 Zoll tief ins Wasser: welches mittelst eines andern leichten Rades mit 4 Linen hohen Schaufeln, 2740 Zoll geschwind in 40 Sekunden, gefunden worden.

## Versuche.

| Zahl der Schaufeln. | gehobene Last in Pfund | Sekunden. | Zahl der Umgänge. |
|---|---|---|---|
| 48 | 24 | 60 | $27\frac{1}{4}\frac{9}{8}$ |
| 24 | 24 | 60 | $27\frac{7}{4}\frac{7}{8}$ |
| 24 | 40 | 40 | $15\frac{2}{4}\frac{8}{8}$ |
| 12 | 40 | 40 | $13\frac{1}{4}\frac{5}{8}$ |

Man sieht, hier ist die größte Wirkung bey 24 Schaufeln und 40 Pfund Last. Ob aber bey 48 Schaufeln die Wirkung nicht größer gewesen wäre, wenn damit ebenfalls ein Versuch mit 40 Pf. Last wäre gemacht worden: läßt sich vermuthen; weil hier die Geschwindigkeit bey 48 Schaufeln doch die größte, obschon der Unterschied klein ist.

Man giebt dem Rade in dergleichen Fällen gemeiniglich nur 8 bis 10 Schaufeln: man sollte ihm aber über 12 bis 24 geben; wie diese Versuche weisen.

820. Wir wollen **noch mehrere Versuche** daher setzen, die bey demselben Strome, mit demselben Rade aber nur mit 24 Schaufeln gemacht worden, die im senkrechten Stande 4 Zoll tief eingetauchet wurden.

| Last. | Sekunden. | Umgänge. |
|---|---|---|
| 30 Pf. | 40 | $17\frac{2}{4}\frac{2}{8}$ |
| 35 | 40 | $16\frac{2}{4}\frac{5}{8}$ |
| 40 | 40 | $15\frac{2}{4}\frac{8}{8}$ |
| 45 | 40 | $14\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ |
| 50 | 40 | $13\frac{3}{4}\frac{4}{8}$ |
| 55 | 40 | $12\frac{3}{4}\frac{7}{8}$ |
| 56 | 40 | $12\frac{2}{4}\frac{8}{8}$ |
| 57 | 40 | $12\frac{1}{4}\frac{9}{8}$ |
| 58 | 40 | $12\frac{1}{4}\frac{0}{8}$ |
| 59 | 40 | $12\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ |
| 60 | 40 | $11\frac{4}{4}\frac{0}{8}$ |
| 61 | 40 | $11\frac{3}{4}\frac{0}{8}$ |
| 62 | 40 | $11\frac{1}{4}\frac{9}{8}$ |
| 63 | 40 | $11\frac{1}{4}\frac{7}{8}$ |
| 64 | 40 | $10\frac{4}{4}\frac{1}{8}$ |
| 65 | 40 | $10\frac{2}{4}\frac{5}{8}$ |
| 66 | 40 | $10\frac{1}{4}\frac{5}{8}$ |

Multipliciret man hier überall die Last mit der Zahl der Umgänge; so findet man das größte Produkt bey 60 Pfund und $11\frac{4}{4}\frac{0}{8}$ Umgängen.

Die Geschwindigkeit des Mittelpunkts der Schaufel ist da, für 40 Sekunden, 1189 Zoll, oder 2,477 Schuh in einer Sekunde; und des Stromes seine 2740 Zoll, in 40 Sekunden, oder 5,708 Schuh in einer Sekunde; folglich des Rades Geschwindigkeit noch nicht die Hälfte von des Stromes seiner: da wir doch (813) bey der größten Wirkung das Verhältniß der Geschwindigkeit des Rades zu des Stromes seiner 1 : 1,732, gefunden haben; welches mehr als die Hälfte ist. Was ist hierauf zu sagen?

Die-

Dieses: daß genanntes Gewicht nicht der ganze Widerstand sey; sondern daß bey der Maschine gewiß eine Reibung ist, und die Schaufeln hinter sich und im Hinaufsteigen am Wasser gewiß auch noch einen merklichen Widerstand finden: welches alles mit zur Last gerechnet werden muß, die mit der Geschwindigkeit zu multiplicieren, um die Wirkung zu bekommen. Setzen wir sie nun größer, z. B. durchgehends um 10 Pfund: so ist jenes Produkt nicht mehr am größten, bey 60 + 10 Pfund wo der Umgänge $11\frac{4}{8}$ sind, sondern bey 57 + 10 Pfund, wo der Umgänge $12\frac{1}{8}$ sind; u. s. w.

Nun trägt die Reibung allein, nach der leichtesten Rechnung, auf den Ort der Last Q, oder Umfang der Welle vom Rade gebracht, 10 bis 11 Pfund aus. Was wird nun nicht der Widerstand des Wassers hinter dem Rade, allda austragen; da dieser so beschaffen, daß, wann das Wasser da ganz ruhete, des Rades Geschwindigkeit nur die Hälfte von der seyn könnte, welche wäre, wann dahinter kein Wasser wäre? Der bey der Schaufel mit der Reibung auf 70 Pfund angenommenen Last Widerstand ist, $5\frac{5}{8}$ Pfund; und dieser in eine Wassersäule verwandelt, deren Grundfläche der ins Wasser getauchte Theil der Schaufel von 4 × 5 Quadratzoll ist, hat zur Höhe 0,6 Schuh; da des Stromes Abfall, nach der von Bossut angegebenen Geschwindigkeit, nur 0,539 Schuh ist.

Setzet man den Kubikschuhwasser statt 70 Pfund, 72 Pfund schwer; so erhält man für die erste Höhe $\frac{0{,}6.70}{72} = 0',5833....$: die ebenfalls größer, als des Stromes Abfall $0',539$ ist.

Verwandelt man die ganze Kraft des Stromes, der auf die Fläche der Schaufel von $4 \times 5 = 20$ Quadratzoll stößt in ein Gewicht; so bekömmt man $\frac{0{,}539 \times 4 \times 5 \times 72}{12.12}$ $= 0{,}539 \times 10 = 5{,}39$ Pfund für diese Kraft. Setze ich dafür auch 5,4; und die Last $L = 5{,}4 \times 16 : \frac{4}{3}$; so ist diese $L = 5{,}4 \times 12 = 64{,}8$ Pfund; weniger als 66 Pfund; die doch, samt der Ueberwindung der Reibung und anderer Hindernisse mit einer Geschwindigkeit von $10\frac{5}{8}$ Umdrehungen in 40 Sekunden beweget worden.

Man findet also durch diese Rechnungen, nach der angegebenen Geschwindigkeit des Stromes, seine Kraft offenbar zu gering für die bewegte Last. Was ist weiter zu schließen? Ist die angegebene Geschwindigkeit wirklich zu klein? Oder hat der Strom bey den unterschlägtigen Wasserrädern wirklich mehr Vermögen als diese Rechnungen geben, wobey vielleicht noch einige wirksame Umstände auser acht gelassen worden?

Nun ist freylich wohl möglich, daß des Stromes Geschwindigkeit größer war, als die angegebene. Denn Bossut bediente sich zu derselben Messung eines leichten Rades mit unterschlägtigen Schaufeln, die nur 4 Linen tief ins Wasser giengen. So hat er dann nur die obere Geschwindigkeit gefunden; nicht die untere, welche in diesen Umständen größer ist.

Lassen wir aber diese beobachteten Geschwindigkeiten gelten, und nehmen diese Versuche ganz für richtig an, und rechnen nach der parentischen Hypothese (812); so haben wir allgemein diese Formel $L' = \frac{KR}{rG^2} \times (G-g)^2$:

wo:

worin L′ die gesuchte Last bedeutet; K = 5,4 Pfund die ganze Kraft des Stromes; R : r = 16 : $\frac{4}{5}$ = 12: 1 das Verhältniß der Entfernungen der Kraft und Last von des Rades Achse; G des Stromes beobachtete Geschwindigkeit von 2740 Zoll in 40 Sekunden, oder 5,708 Schuh in einer Sekunde; und g des Rades Geschwindigkeit, die man mittelst der beobachteten Umgänge des Rades finden muß, und bey 11$\frac{4}{4}\frac{0}{8}$ Umgängen in 40 Sekunden, 1189 Zoll in 40 Sekunden, oder 2,477 Schuh in einer Sekunde beträgt; so daß $\frac{KR}{rG^2}$ = $\frac{4,050000}{2,036329}$, = 1,99 beynahe, und

$L' = 1,99 \times (5,708 - g)^2$ ist.

Rechnen wir aber nach unserer hiesigen (811) neuen Theorie; so bekommen wir statt jener, diese Formel

$$L'' = \frac{KR}{rG^2} \times (G^2 - g^2) = 1'99 \times (32,58 - g^2).$$

Nach diesen zweyen Formeln gerechnet, erhält man folgende Tabelle.

| L | L′ | U′ | L″ | U″ |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 8,46 | 21,54 | 38,26 | —8,26 |
| 35 | 10,07 | 24,93 | 41,05 | —6,05 |
| 40 | 11,90 | 28,10 | 43,66 | —3,66 |
| 45 | 13,95 | 31,05 | 46,10 | —1,10 |
| 50 | 16,03 | 33,97 | 48,45 | 1,55 |
| 55 | 18,33 | 36,67 | 50,62 | 4,38 |
| 56 | 18,80 | 37,20 | 51,04 | 4,96 |
| 57 | 19,29 | 37,71 | 51,46 | 5,54 |
| 58 | 19,78 | 38,22 | 51,85 | 6,15 |
| 59 | 20,27 | 38,73 | 52,23 | 6,77 |
| 60 | 20,76 | 39,24 | 52,63 | 7,37 |
| 61 | 21,34 | 39,66 | 53,07 | 7,93 |
| 62 | 21,97 | 40,03 | 53,53 | 8,47 |
| 63 | 22,66 | 40,34 | 54,00 | 9,00 |
| 64 | 23,49 | 40,51 | 54,58 | 9,42 |
| 65 | 24,45 | 40,55 | 55,20 | 9,80 |
| 66 | 28,26 | 37,74 | 57,37 | 8,63 |

L ist die Last nach der Beobachtung

L′ ist die Last nach dieser Formel $\frac{KR}{rG^2} \times (G-g)^2$

U′ ist der Unterschied dieser beyden Läste

L″ ist die Last nach dieser $\frac{KR}{rG^2} \times (G^2-g^2)$

U″ ist der Unterschied von dieser Last, und der beobachteten.

Da sieht man nun, daß die Resultate der Rechnung mit den beobachteten, nach keiner Formel übereinstimmen. Nach der ersten sind alle viel kleiner. Nach der andern sind sie erst größer; hernach kleiner: ihre Unterschiede aber nehmen erstlich ab, und hernach, nachdem er zwischen — 1,10 und 1,55 null gewesen seyn muß, wieder zu, bis auf den letzten 8,63, welcher kleiner, als der vorhergehende 9,80 ist.

So ist also wohl gar keine von diesen zwey Formeln was werth? Denn was nützet solche Formel oder Theorie, die von der Erfahrung gar zu weit abweichet? wie schon Herr **Marquis** Ducrest in seinem Essais sur les machines hydrauliques, a Paris 1777 angemerket, worin er über die angenommene Theorie des **Parent** Untersuchungen anstellet, und die Bossutischen Versuche ebenfalls weiter berechnet, und den Unterschied zwischen dieser Theorie und der Erfahrung betrachtet.

Allein ich sage: daß **diese Erfahrungen oder Versuche, unserer Formel oder neuen Theorie nicht entgegen seyn.** Es mischen sich nämlich in diese Erfahrungen umstände ein, die nicht mit in die Rechnung gekommen. Wären diese Umstände nicht: so würde die Theorie mit den Versuchen ganz übereintreffen. Diese Umstände sind diese, daß das Wasser auf den ersten schiefen Schaufeln, da sie in den Strom treten, hinauffahren, und darauf, so lang der schiefe Stand währet, liegen bleiben muß; und zwar desto mehr, je langsamer das Rad geht. Also drücket dann die Schwere dieses Wassers auch mit, und zwar mehr beym langsamen Gange des Rades als beym geschwinden. Daß dieses ungemein viel austrägt, werden wir in folgenden Versuchen beyden schiefen Schaufeln sehen.

Man kann also wohl sagen, daß der Ueberschuß der berechneten Last beym ersten Versuche, wo des Rades Geschwindigkeit am größten ist, beynahe das ist, was da die Reibung beträgt, welche nach der Theorie da auch noch größer seyn müßte; und daß da die Schwere des auf den schiefen Schaufeln hinaufgeschossenen Wassers noch nicht so viel wirke; hernach aber immer mehr: weßwege die berechnete Last L'' immer kleiner wird, als die beobachtete L ist.

Was aber den letzten Versuch bey 66 Pfund der beobachteten Last betrifft, kann ich nicht sagen; nimmt da die Wirkung des aufgeschossenen Wassers wieder ab; oder ist die angegebene Geschwindigkeit, die Zahl der Umgänge von $10\frac{5}{48}$ etwas zuklein: wie ich fast vermuthen sollte; weil nach der Aehnlichkeit der Reihe, sie $11\frac{7}{48}$ seyn müßte. Nimmt man diese an: so kömmt da für L', 25,57 statt 28,26; und für L'', 55,86 statt 57,37; folglich für U' 40,43 statt 37,74; und für U'' 10,14 statt 8,63: wo nach unserer Formel der Unterschied U'' noch fortwüchse.

So kämen dann diese Versuche mit unserer Theorie überein, bis auf die Wirkung des aufgeschossenen Wassers; mit der alten, parentischen aber keinesweges: weil hier die Unterschiede U' gar zu groß, fast das Gedoppeltete von der berechneten Last, L'; zu Anfang noch größer, hernach aber etwas kleiner, dem Gesetze dieser Wirkung entgegen sind.

Kein Zweifel ist also, daß unsere Theorie nicht vollkommen richtig sey, im Falle ein Fläche ganz in den Strom getaucht, mit einem senkrechten Widerstande sich stets nach dessen Richtung bewegen könnte; wie auch bey dem unterschlägtigen Wasserrade, wenn man die Wirkung des aufgeschossenen Wassers nicht betrachtet.

Diese neue Theorie muß dann nicht nur bey den unterschlägtigen Wasserrädern; sondern überall, wo sich das Wasser gegen Flächen, oder diese gegen das Wasser bewegen, auch bey Schiffen und ihrem Baue nützliche Kenntnisse gewähren; so daß man nicht mehr Ursache haben wird, sich darüber zu beklagen; gleichwie der **Marquis** Ducrest sich in seinem Essais über die alte beklagt, daß sie von der Erfahrung so sehr abweiche, daß es mehr schädlich als nützlich seyn würde, sich darnach zu richten. Nur sollte man noch eine Regel haben, die Wirkung des an den Flächen aufsteigenden oder aufgeschossenen Wassers zu berechnen.

821. Da es so schwer ist, bey dieser Materie ganz genaue **Versuche** anzustellen: so will ich noch einige von denen, die Hr. Bossut bey **schiefen Schaufeln** (Fig. 316), die eine Neigung gegen des Rades Halbmesser haben, und 12 in der Zahl waren, gemacht hat, daher setzen. Das Rad war in demselben Strome 4 Zoll tief eingetaucht.

| Neigung | Last | Sekunden | Umgänge |
|---|---|---|---|
| 0 Grad | 40 | 40 | $13\frac{1}{4}\frac{7}{8}$ |
| 15 | 40 | 40 | $14\frac{2}{4}\frac{1}{8}$ |
| 30 | 40 | 40 | $14\frac{2}{4}\frac{2}{8}$ |
| 37 | 40 | 40 | $14\frac{1}{4}\frac{5}{8}$ |

Hier sieht man, daß die schiefen Schaufeln eine größere Wirkung haben, als die geraden, welches unsere obere Erläuterung der neuen Theorie mit den Versuchen rechtfertiget; und daß die vortheilhafteste Schiefe zwischen 15 und 30 Graden fällt. Es ist allezeit eine gewisse Schiefe, die man nicht überschreiten muß: weil man sonst bey dem Stoße mehr verlöhre; als man durch das Gewicht des über die Schaufeln glitschenden Wassers

gewinnt. Herr de Parcieux führt (in den Mem. de l'Acad. 1759) Versuche an, darin die schiefen Schaufeln vortheilhafter, als die geraden, sind.

822. Es giebt auch horizontale Räder (Fig. 317 u. 318) welche den unterschlägtigen gleichen: davon also weiter nichts besonders zu sagen. Doch kann man den krummen Schaufeln (Fig. 318), die meistens üblich sind, wohl eine Gestalt geben, wodurch sie den Vorzug vor den geraden erhalten: wenn man sie nämlich so einrichtet, daß der Stoß dargegen, so lang er währet, von dem geraden weniger abweichet, als der bey geraden Schaufeln: welches sich ganz leicht denken läßt.

823. Es giebt noch eine besondere Art von Rädern, besonders in Frankreich (in Guyenne und Languedoc) die Mühlen zu bewegen. Diese Räder sind auch horizontal, oder ihre Achsen vertikal; und haben schiefe oder spiralförmige Schaufeln, wie die 319te **Figur** zeiget. Das darauf fallende Wasser treibt den gestutzten Kegel um seine Achse herum. Man stellet diese Räder in gemauerte Kufen, die eigends dazu gemacht werden.

In der Rechnung müßte man aber nicht nur den Stoß des Wassers; sondern auch seine Schwere, die auf die Schaufel als auf eine zurückweichende schiefe Fläche drücket, betrachten.

# Von den oberschlägtigen Wasserrädern.

824.

**Oberschlägtige Wasseräder** sind solche Räder, die das Wasser oben (Fig. 320), in T, mit ihren Schaufeln auffangen; und in ihrer Bewegung unten gegen D wieder ausschütten. Diese **Schaufeln** sind nämlich hole Kästen oder Gefäße, welche das Wasser oben, von T bis B, im ersten Quadranten, gar wohl halten können; und unten von B bis D hin, im zweyten Quadranten ausschütten; in der andern Hälfte des Rades DET aber nichts fassen mögen.

825. Die Kraft welche das oberschlägtige Rad beweget, ist die Schwere des Wassers in den Schaufeln. Anfangs geschieht diese Bewegung mit zunehmender Geschwindigkeit: aber nach etlichen Umdrehungen wird sie gleichförmig. Und da kann es geschehen, daß des Rades Geschwindigkeit, der Geschwindigkeit des auffallenden Wassers gleich; auch, daß sie größer, und auch, daß sie kleiner als diese ist.

Ist des Rades Geschwindigkeit kleiner, als des auffallenden Wassers seine; so wirket, nebst der Schwere, auch der Stoß des Wassers: ist sie hingegen größer als diese; so muß daß Rad durch seinen Stoß an das Wasser, und durch des auffallenden Wassers Trägheit gehindert werden.

826. Es sey ABDE (Fig. 321) ein vertikales um seinen Mittelpunkt C vollommen bewegliches Rad. Der

Theil

Theil des Kranzes GgBhH, dessen Höhe Gg oder Hh in Ansehung des Halbmessers CM des Rades, unendlich klein ist, sey voll von Wasser. Aus dem Mittelpunkte C seyen die zwey einander unendlich nahen Halbmesser CM, Cm gezogen, welche die unendlich kleine Quantität Wasser MNnm bestimmen. Aus den Punkten G, H, M, m seyen die Horizontallinen GF, HV, MP, mp gezogen. Auch sey die Vertikale MI bis zum horizontalen Durchmesser BE in I hinabgelassen, welche die zum vertikalen Durchmesser AD gehörige Ordinate mp, in t, schneidet. Der Theil Wasser MNnm kann durch Mm × MN; und sein Moment, in Betracht des Mittelpunkts C, durch Mm × MN × CI, oder Mm × MN × MP vorgestellet werden. Nun ist wegen der ähnlichen Dreyecke Mtm, MPC, Mm : CM = Mt oder Pp : MP; folglich Mm × MP = Pp × CM; und gesagtes Moment = MN × CM × Pp. Da diese Schlüsse bey allen Elementartheilchen des Wassers GgBhH statt finden: so ist das Moment der Schwere von diesem ganzen Wasser, MN × CM × FV.

827. Drehet sich demnach das Rad mit der Geschwindigkeit des auffallenden Wassers um; so das dadurch kein Stoß geschieht; und man nennet die gehobene Last Q; und ihren Hebelsarm, den Halbmesser der Welle vom Rade, c; und den rechtwinklichten Durchschnitt der Schaufel, davon MN die Höhe, und die Breite horizontal ist, A; so entsteht die Gleichung Q × c = A × CM × FV. Aus dieser wird, wenn man des Gewichtes Q Geschwindigkeit g, und die vom Umfange des Rades, G nennet, und bedenket, daß $g = \frac{cG}{CM}$ sey,

$$Qg = A \times FV \times G.$$

Hiedurch läßt sich die Wirkung in gegenwärtigem Falle bestimmen.

827. Es sey also ABDE (Fig. 322) ein vertikales Rad, welches durch das Wasser in dem oben geschlossenen Kanale OZGg beweget werde, so daß, nach gezogener Horizontale GF, des Wassers Geschwindigkeit in G angesehen werden könne, daß sie der Höhe FR zukomme, welche mit der Höhe des Wassers im Behälter XZVT übereinstimmet: wo der Punkt R als beständig angenommen wird, der Punkt G mag in einem Orte des Bogens ABD seyn, wo er immer will. Daher ist die Wasserverschwendung mittelst des Kanals, wie die Quadratwurzel der Höhe RF. Ich setze der Umfang ABDE bewege sich mit der Geschwindigkeit des Wassers in G; so daß beym Eingang des Wassers in die Schaufel kein Stoß geschehe. Es stelle der Theil des Kranzes GBH hbg die Menge Wasser vor, das beständig in den Schaufeln ist; so daß bey Hh soviel weg gehe, als bey Gg hinein geht; und des Kranzes dicke durchgehends Gg gleich sey. Aus dem Punkte H sey HV senkrecht auf AD gezogen. Behalten wir die Benennungen vom vorigen §; und nennen wir noch die der Höhe h zugehörige Geschwindigkeit g': so ist $G = g' \times \frac{\sqrt{RF}}{\sqrt{h}}$. Daher verwandelt sich die letzte Gleichung im 826 §, in diese

$$Qg = \frac{A \times FV \times g' \sqrt{RF}}{\sqrt{h}}$$

Damit die Maschine die größte Wirkung mache; so muß dieser Ausdruck $\frac{A \times FV \times g' \times \sqrt{RF}}{\sqrt{h}}$ ein größtes (Maximum) seyn. Da nun A, g', h beständige Grö-

ßen

ßen sind: so darf nur $FV \times \sqrt{RF} =$ Maximum seyn. Wenn eine Größe ein Maximum ist: so ist auch ihr Quadrat eines: folglich $FV^2 \times RF =$ Max. Daher findet man hier für die größte Wirkung $RF = \frac{RV}{3}$, wie oben (813). Es muß nämlich die der Geschwindigkeit des Rades zugehörige Höhe, dem dritten Theile der Höhe des Wassers im Behälter über der Horizontalline VH, wo es das Rad verläßt, gleich seyn.

828. Setzet man in der Gleichung von Qg (827) statt RF den Werth $\frac{RV}{3}$, und statt FV den Werth $\frac{2}{3}RV$; so verwandelt sie sich in diese:

$$Qg = \frac{A \times 2RV \times g' \times \sqrt{RV}}{3\sqrt{3} \times \sqrt{h}};$$

so der **Ausdruck der größten Wirkung der Maschine** ist.

829. Die Auflösung dieser Aufgabe kann da nützlich seyn; wann man ein Rad schon fertig hat; und man ihm durch das bloße Gewicht des Wassers die vortheilhafteste Bewegung geben will, im Falle man aus dem Wasserhalter von der gesetzten Höhe, so viel Wasser leiten kann, als man bedarf. Man muß alsdann die Leitröhre OZGg so richten; 1) daß das Wasser ganz in die Schaufeln falle; 2) daß RF der dritte Theil von RV sey; und 3) daß der Umfang des Rades die Geschwindigkeit des Wassers in G nehme.

830. Da hier 827 für das oberschlägtige Wasserrad derselbe Ausdruck der größten Wirkung gefunden wor-

den; wie oben 813 für das unterschlägtige: so scheinet mir diese Uebereinstimmung eine Bestätigung der Wahrheit beider Auflösungen zu seyn.

Es machet nämlich bey demselben Strome das oberschlägtige Wasserrad ganz die nämliche Wirkung, wie das unterschlägtige; wenn beide Räder gleich groß sind, und des Wassers Durchschnitt nach der Richtung des Radius auf dem oberschlägtigen dem vom anstoßenden Wasser beym unterschlägtigen gleich ist; und beider Geschwindigkeiten gleich sind. Und zwar ist bey beiden die größte Wirkung; wenn der Abfall der Geschwindigkeit des Rades einem Drittel des Abfalles vom höchsten Punkte des Wasserstandes bis zum niedrigsten, wo das Wasser das Rad verläßt, gleich ist.

831. Es wird freylich wohl das Wasser bey dem oberschlägtigen Rade nicht so gleich im Bogen herum liegen, wie vorausgesetzet worden: allein man kann das Rad breiter machen; damit oben mehr liegen bleibe, und doch so viel darauf liege als gesetzet worden. Zudem sind die Schaufeln des unterschlägtigen auch nicht immer senkrecht; wie es seyn sollte.

832. Indessen wird doch bey derselben Zurichtung, wie (830) gesagt, und bey demselben Wasserstande, welcher nicht beständig zureichet, so viel Wasser zu geben, als das unterschlägtige Rad erfodert, das oberschlägtige vortheilhafter zu brauchen seyn. Denn indem der Durchschnitt des anstoßenden Wassers bey beiden Rädern gleich; aber seine Geschwindigkeit beym oberschlägtigen zu der beym unterschlägtigen, wie 1 zu $\sqrt{3}$ ist: so wird beym unterschlägtigen, auch bey obgesagter gleicher Wirkung, viel mehr Wasser, als beym oberschlägtigen erfodert; und

zwar

zwar muß sich jene Menge Wasser zu dieser, wie $\sqrt{3}$ : 1 = 1,732 : 1 verhalten.

Daher ist auch in diesem Falle das oberschlägtige Rad so viel, 1,732 mal nützlicher als das unterschlägtige.

833. Wir wollen daher noch eine Rechnung über das oberschlägtige Rad machen, und dabey die Menge Wasser beständig, = M und des Wassers Durchschnitt A auf dem Rade veränderlich $= \frac{M}{G} = \frac{M}{g'} \times \sqrt{\frac{h}{RF}}$ (827) setzen. Denn weil $M = A \times G$; so muß $A = \frac{M}{G}$ seyn; wo A veränderlich ist; weil G veränderlich angenommen wird. Demnach verändert sich die obige Gleichung (827), in diese $Qg = \frac{M \times \sqrt{h} \times FV \times g' \times \sqrt{RF}}{g' \times \sqrt{RF} \times \sqrt{h}}$ $= M \times FV = M \times (RV - RF)$; das heißt:

Die Wirkung des oberschlägtigen Wasserrades ist desto größer, je kleiner seine Geschwindigkeit, oder die ihr zugehörige Höhe RF ist.

834. Um in diesem Falle, wo des oberschlägtigen Rades Geschwindigkeit so klein als möglich ist, und dabey so viel Wasser als beym unterschlägtigen angewendet wird, beider Wirkungen miteinander zu vergleichen: wollen wir die obigen Größen (813) beym unterschlägtigen für die hiesigen (833) beym oberschlägtigen setzen. Demnach ist $a = RV$, und $x = RF$. Die Schaufelfläche beym unterschlägtigen, oder den Durchschnitt des dasigen Wassers setzen wir beständig $= b^2$: so ist der beym oberschlägtigen $= b^2\sqrt{\frac{a}{x}}$. Daher der Ausdruck der Wir-

kung beym oberschlägtigen, wie $b^2\sqrt{\frac{a}{x}}(a-x)\sqrt{x} =$ $b^2(a-x)\sqrt{a}$ (827); da der beym unterschlägtigen $b^2(a-x)\sqrt{x}$ ist (813): mithin die Wirkung des oberschlägtigen zu der Wirkung des unterschlägtigen, wie $\sqrt{a}$ zu $\sqrt{x}$, das ist, wie die Geschwindigkeit des Stromes beym unterschlägtigen zu der Geschwindigkeit der Räder, wenn sie bey beiden gleich ist.

Aber im Falle der größten Wirkung beider Räder verhält sich die vom oberschlägtigen zu der vom unterschlägtigen, wie $b^2a\sqrt{a} : b^2\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}a} = 1 : \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ $= 1 : \frac{2}{3.1,732} = 1 : \frac{1}{2,598} = 26 : 10 = 13 : 5$ beynahe; und die beym oberschlägtigen ist fast $2\frac{3}{5}$ mal größer, als die beym unterschlägtigen.

835. Bey einem kleinen Wasserstande sind also die oberschlägtigen Räder immer vortheilhafter als die unterschlägtigen. Wo aber eine größere Geschwindigkeit erfodert wird, ohne eine große Last zu heben; da können die unterschlägtigen besser dienen. Und überhaupt können diese bey großen Flüssen allein angewendet werden.

836. Wir wollen auch noch die **Versuche** betrachten, welche Bossut **über die oberschlägrigen Räder** gemacht hat. XYTZ (Fig. 320) ist eine horizontale Rinne, welche das Wasser auf das Rad leitet. Ihre Weite ist 5 Zoll; und das Wasser steht darin fast still. Sie giebt beständig gleich viel Wasser; nämlich 1194 Kubikzoll in 1 Minute. Des Rades Durchmesser AD ist 3 Schuh; und der von der Welle, worauf sich das Seil windet, 2 Zoll 7 Linen; und der von den Zapfen, $2\frac{1}{2}$ Line. Die Rolle ist dieselbe, wie

bey

bey den Versuchen über die unterschlägtigen Wasserräder. Die Höhe der Schaufeln ist ungefähr 3 Zoll; ihre Breite 5 Zoll; und ihre Anzahl 48.

In diesen Versuchen wurden die Umgänge nur gezählt, nachdem die Bewegung gleichförmig geworden: welches nach 5 oder 6 Umdrehungen geschieht.

| Last | Sekunden | Umgänge | Unterschiede |
|---|---|---|---|
| 11 Pf. | 60 | $11\frac{4}{4}\frac{6}{8}$ | |
| 12 | 60 | $11\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{4}\frac{5}{8}$ |
| 13 | 60 | $10\frac{2}{4}\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{4}\frac{4}{8}$ |
| 14 | 60 | $9\frac{4}{4}\frac{0}{8}$ | $\frac{3}{4}\frac{3}{8}$ |
| 15 | 60 | $9\frac{1}{4}\frac{0}{8}$ | $\frac{3}{4}\frac{0}{8}$ |
| 16 | 60 | $8\frac{3}{4}\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{4}\frac{7}{8}$ |
| 17 | 60 | $8\frac{?}{4}\frac{?}{8}$ | $\frac{2}{4}\frac{2}{8}$ |
| 18 | 60 | $7\frac{3}{4}\frac{2}{8}$ | $\frac{2}{4}\frac{5}{8}$ |

Macht man das Gewicht Q von 19 Pfund: so dreht sich das Rad noch; aber sehr langsam. Ist das Gewicht 20 Pfund: so bleibt das Rad stehen; wenn man es auch anfangs mit der Hand in Bewegung setzet, damit es Wasser fasse. Doch scheint die Last noch etwas zugering zu seyn.

Wann das Rad keine Last zu heben hat; so macht es $40\frac{1}{4}$ Umgänge in 1 Minute.

Wenn man ein jedes dieser gehobenen Gewichter mit der dazu gehörigen Zahl der Umgänge multiplicirt; so wird man finden, daß diese Produkte anfangs wachsen;

und

und hernach wieder abnehmen. Das größte aus ihnen ist dasjenige, welches ungefähr 17 Pfunden zukommt.

837. Wie kommt es, daß diese Versuche (836) nicht mit der Theorie übereintreffen? daß die Wirkung nicht beständig fortwachse, wie es seyn soll (833); sondern wieder abnehme? Dieses kömmt daher; weil des Rades Schaufeln schon ihre bestimmte Größe haben; und nicht so viel Wasser fassen können, als bey der langsamen Bewegung erfoderlich ist. Denn wir haben (834) den Durchschnitt der Schaufeln oder des Wassers am oberschlägtigen Rade, $b^2\sqrt{\frac{a}{x}}$ gefunden, daß er sich nämlich wie umgekehrt des Rades Geschwindigkeit $\sqrt{x}$ vorhalte. So sollten dann die Schaufeln immer breiter und breiter werden; je langsamer sie sich bewegen. Daher sieht man auch an den Versuchen, daß die Unordnung schon bey 15 Pfund Last anfange: allwo in dem Unterschiede der Geschwindigkeit schon ein Sprung von $\frac{3}{4\,8}$ geschieht; da er vorher immer nur $\frac{1}{4\,8}$ war. Diese Versuche sind also nicht wider die (833) gegebene Regel: indem das Rad nicht die erfoderliche Eigenschaft gehabt; und nicht so viel Wasser hat fassen können, als die Regel vorschreibt.

838. Da aber doch aus diesen Versuchen (836) erhället, daß bey einem schon fertigen oberschlägtigen Wasserrade, eine größte Wirkung statt haben könne: so wollen wir diese allgemein zu bestimmen suchen. Wir haben den Ausdruck der Wirkung eines oberschlägtigen Rades (834), dem Verhältniß nach, $b^2\sqrt{\frac{a}{x}}\,(a-x)\sqrt{x}$ gesetzet. Da der Schaufeln Größe oder durchschnitt $b^2\sqrt{\frac{a}{x}}$ bestimmet ist: so ist auch x bestimmet. Wir setzen es,

x =

$x = e$: so ist, weil der Ausdruck der Wirkung des ober- und unterschlägtigen Wasserrades bey gleichem Durchschnitte der Schaufeln, einerley ist (830), hier im Verhältnisse, die Wirkung $b^2\sqrt{\frac{a}{e}}((a-e)+e-y)\sqrt{y} =$

$b^2\sqrt{\frac{a}{e}}(a-y)\sqrt{y}$; oder nur $(a-y)\sqrt{y}$, wenn y die der Geschwindigkeit des Rades zugehörige Höhe bedeutet. Da ist also die Wirkung am größten; wenn, wie oben (823) $y = \frac{a}{3}$, der Abfall der Geschwindigkeit des Rades ein Drittel des ganzen Abfalles vom Strome ist.

Wenn daher e wirklich kleiner als $\frac{a}{3}$ wäre; und also y nie $\frac{a}{3}$ werden könnte: so müssen die Versuche doch ein Maximum zeigen; nämlich da, wann $y = e$ wird.

Sollte aber die Fläche f, woran das Wasser am oberschlägtigen Rade stößt, kleiner als der Schaufel Durschnitt $b^2\sqrt{\frac{a}{e}} = B$ seyn: so muß man, statt des vorigen Ausdruckes der Wirkung $b^2\sqrt{\frac{a}{e}}((a-e)+e-y)\sqrt{y}$, diesen $(B(a-e)+f(e-y))\sqrt{y}$ setzen; oder, wenn $B(a-e) = h$, und $f = 1$, diesen $(h+e-y)\sqrt{y}$. Daher ist bey der größten Wirkung $y = \frac{h+e}{3} = \frac{B(a-e)+fe}{3}$, die der Geschwindigkeit des Rades zugehörige Höhe kleiner als damals; wann die Anstoßfläche f dem Durchschnitte B gleich ist.

839. Da es bey kleinen Wasserständen hauptsächlich darauf ankömmt, das ganze Wasser und seinen ganzen Fall recht zu nützen; so will ich darüber noch eine Anmerkung machen: welche dienen kann, sowohl schon fertige Räder, ober- und unterschlägtige, leicht zu verbesseren; als neu zuerbauende gut zu zurichten.

Ist ein oberschlägtiges Wasserrad schon fertig und es steht schon an seinem Orte (Fig. 323): so darf man es nur mit einem Bogen FGH einfassen, der die Schaufeln fast berührt, so daß wenig oder gar kein Wasser zwischen ihnen und dem Bogen durchgehen kann. Dadurch wird geschehen, daß das Wasser nicht nur auf dem obern Quadranten TB des Rades, sondern auch auf dem untern BD liegen bleibe, und drücke; so daß, da ohne diesen Bogen, des Wassers Kraft, durch TV vorgestellet wurde, so mittelst dieses Bogens, durch TD vorgestellet werden kann; und mit dem Bogen fast noch einmal so groß als ohne Bogen seyn wird (833).

Unterschlägtige Räder werden besser, wenn sie den oberschlägtigen gleich gemacht werden (832 u. 834). Dieses kann geschehen; wenn man sie ebenfalls mit einem Bogen AB (Fig. 324) oder mit einer ganzen krummen Rinne, und rückwärts mit einem Kranze oder Boden GHIK einfasset; so daß fast kein Wasser zwischen den Schaufeln und der Rinne durchgehen kann. Man könnte die Schaufeln auch wohl schief einsetzen, wie die Linien im zeigen, und Hr. v. Ducrest vorschreibt. So wird das Rad desto mehr Wirkung machen; je langsamer es geht; wenn anders die Schaufeln die erfoderliche Größe haben: und zwar wird diese Wirkung wie $ED\sqrt{EC}$ seyn; wenn der Schaufeln Geschwindigkeit der Höhe EC zukommt: und die Schaufelfläche muß so dann $b^a\sqrt{\frac{CD}{EC}}$

seyn

seyn, wo $b^2$ die Fläche oder Oeffnung bedeutet, durch die das Wasser bey dem Falle CD durchfließen kann.

Durch diese Zurichtung läßt sich also die Wirkung der Maschine sehr vermehren: und die größte wäre; wenn die Schaufeln unendlich groß wären, wie bey oberschlägtigen. Doch hat auch diese größte Wirkung ihre Gränzen; und ist deßwegen nicht unendlich; weil die Schaufeln unendlich groß seyn müßten: indem die größte Wirkung des oberschlägtigen Rades, die größte vom unterschlägtigen nur $2\frac{3}{5}$ mal in sich enthalten, oder nur $2\frac{3}{5}$ mal so groß als diese seyn kann (834).

Ist aber die Größe der Schaufel schon bestimmt: so gewinnet man durch den Bogen bey dem unterschlägtigen Rade das, daß auch bey der größten Wirkung da nicht so viel Wasser erfodert wird, als ohne den Bogen (832) nöthig ist: wodurch die Maschine 1,732 mal nützlicher wird, als sie ohne den Bogen ist; wenn man die Wirkung des aufgeschossenen Wassers nicht betrachtet.

Ob aber das an den Schaufeln des unterschlägtigen Rades hinaufgeschossene Wasser nicht etwa machet, daß seine ganze Wirkung eben so groß ist, als die vom oberschlägtigen Rade? ist eine Frage. Allein die Theorie und die obigen Versuche, wenn man die Rechnung mit diesen vergleichet, sagen nein.

---

# Von Windrädern und Windflügeln.

840.

Eben diese Regeln von dem unterschlägtigen Wasserrade lassen sich auch bey dem Windrade anwenden, welches ihm ähnlich ist; dergleichen man in **Leupolds** Maschinentheater und andern antrifft. Doch muß der von den schiefen Schaufeln abprällende Wind einige Unordnung in der Bewegung verursachen: weßwegen es scheint, daß ihr Gebrauch so selten. Zudem muß auch des Rades Geschwindigkeit nach dem abwechselnden Winde sehr veränderlich seyn. Daher wird wohl schwerlich davon der Nutzen bey Windmühlen zu hoffen seyn, den sich **Marquis Ducrest** davon in seinem Essais verspricht. Man kann sich von einem solchen Rade den Begriff durch die 325 Fig. machen: wo sich die Schaufeln auf einer Seite an die Speichen anlegen, daß der Wind darauf stoßen kann; und auf der andern Seite öffnen, und mit dem Winde parallel sind, daß er nicht darauf stoßen kann. Also wäre dieses Rad freylich wohl leicht zu brauchen: indem der Wind jederzeit, er mag herkommen, woher er will, auf den vierten Theil der Schaufeln stoßen, und so das Rad umtreiben wird.

841. Die Kraft des Windes zu erkennen hat man gewisse Instrumente, **Windwagen**, **Windmesser**, genannt, dergleichen eine sehr bequeme in dem **Anhange der kleinen Mech. W.** beschrieben ist. Man könnte dazu auch den oben bey der Flußmessung beschriebenen Quadranten (oder das Dreyeck) mit der Kugel brauchen.

chen. Für einen mittelmäßigen Wind hält man den, dessen Geschwindigkeit in einer Sekunde 24 Schuh beträgt. Berechnet man seine Stärke, wie die vom Strome: so findet man sie, wenn er auf eine Fläche von 144 Quadratschuh stößt, die der Windflügel ihre gemeiniglich ausmacht, höchstens 120 Pfund Parisermaß. Belidor setzet sie nach einem Versuche auf 168 Pfund; oder die gegen einen Quadratschuh auf $\frac{7}{8}$ Pfund. Ein Wind, der 26 Schuh in einer Sekunde hat, und auf einen Quadratschuh stößt hat eine Kraft von 1 Pf.

Nach diesen Voraussetzungen kann man des Windes Wirkung auf das (840) beschriebene Windrad leicht berechnen. Es ist nämlich, wenn die sich auf des Windes Geschwindigkeit beziehende Höhe, a; und die Fläche, auf die er senkrecht stößt, ff, und ein Kubikschuh Luft $\frac{7}{8}\frac{7}{0}$ Pfund schwer ist, des Windes senkrechte Kraft $\frac{7}{8}\frac{7}{0}$ aff: wofür man leicht Zahlen setzen kann. Sollte er durch dieses Windrad die größte Wirkung thun: so müßte der Widerstand im Mittelpunkte der Schaufel $\frac{2}{3} \times \frac{7}{8}\frac{7}{0}$ aff seyn. Ist die Luft mehr als 800 mal geringer, als das Wasser; so ist ein Kubikschuh Luft leichter, als $\frac{7}{8}\frac{7}{0}$ Pf. und so müßte auch die Kraft des Windes, der die Geschwindigkeit von 24 u. 26. Schuh in einer Sekunde hat, geringer als die gesagte seyn.

842. Ueber die Windflügel, welche vielfältig bey Windmühlen (Fig. 326) und andern Maschinen gebrauchet werden, müssen wir noch einige Betrachtungen machen. Diese Windflügel, welche große viereckige Flächen CDEF vorstellen, sind an einem Wellbaume AB befestiget, der um seine Achse beweglich ist. Diese BA muß mit des Windes Richtung parallel seyn, und mit der Fläche CFDE der Flügel, wenn man sie bis zur Achse verlängert gedenket, einen schiefen Winkel machen, damit diese durch den Wind umgetrieben werden können. Denn

setzen wir diese Fläche, z. B. ihre Grundline FC erst parallel mit der Achse BA; hernach senkrecht auf dieser Achse, daß sie einen rechten Winkel damit mache; so ist klar, daß der Wind die Flügel in keinem Falle umtreiben könne.

843. Suchen wir nun die Kraft, mit welcher der Wind die Flügel umtreiben werde, wenn sie mit der Achse einen schiefen Winkel machen. Dieser Winkel sey AGP (Fig. 327): wo PG die Achse, ABDC die rechtwinklichte Fläche des Flügels, senkrecht auf der Fläche ABQO, die nur imaginarisch oder die Fläche des Papieres vorstellet, seyn soll. Weil des Windes Richtung SGP ist: so ist der Einfallwinkel SGB = AGP, dessen Sinus s und Cosinus c seyn soll. Ist daher des Windes senkrechter Stoß oder Druck auf des Flügels Fläche AD, p; so ist der schiefe hier pss, wo der Sinus totus = 1 ist. Da aber die Richtung von diesem Ausdrucke pss senkrecht auf der Fläche AD, und zwar im Mittelpunkte F zu denken: so stellen wir diese Richtung, im Grunde, senkrecht auf der Grundline AB des Flügels durch HK vor. Zugleich drücke diese Line HK die Größe der schiefen Windkraft pss aus. Zerlegen wir nun diese Kraft HK in zwey andere MK und HM, davon eine MK parallel mit der Achse GP, und die andere HM senkrecht auf der Achse GP oder ihrer Parallele ist: so wird die Parallele MK von den Ruhpunkten der Achse gehalten; und die Senkrechte HM ist die Kraft, welche die Flügel umtreibt. Da nun die Dreyecke KMH, GMH, GRA alle ähnlich sind, und der Winkel KHM = HGM ist: so ist HK : HM = 1 : c = pss : HM; und **die umtreibende Kraft** HM = pssc.

844. Wollen wir wissen, wann diese umtreibende Kraft pssc am größten ist: so dürfen wir nur den Si-

nus

nus totus = r, und den Cosinus c = x veränderlich, mithin ss = rr — xx setzen: so ist $pssc = \frac{p(rr-xx)x}{r^3}$.

Dieses Produkt ist das größte: wenn sein Differentiale $\frac{p(rrdx-3x^2dx)}{r^3} = 0$; und daher $x^2 = \frac{rr}{3}$ das Quadrat des Cosinus des Winkels AGP dem dritten Theile vom Quadrate des Sinus totus gleich ist.

Es müssen sich also in diesem Falle die Quadrate des Cosinus des Winkels AGP, und seines Sinus, und des ganzen Sinus, oder der Seiten RG, RA, AG des rechtwinklichten Dreyeckes AGR, verhalten, wie 1, 2, 3.

Man findet daher diesen Winkel geometrisch: wenn man über eine Line AC (Fig. 328) als dem Durchmesser einen Halbkreiß ARC wirft; den Durchmesser AC in drey gleiche Theile theilet, und beym ersten die senkrechte BR aufrichtet; und die Line CR zieht. Denn der Winkel RCA ist der verlangte: weil $BC^2 : BR^2 : RC^2 = 1 : 2 : 3$ ist.

Nach den trigonometrischen Tafeln findet man diesen Winkel von 54° 45'. **Probe.**

Bey 54° 44' ist css = 384894938378442;
54 45 css = 384895179423744;
54 46 css = 384885896256000;

wo die mittlere Zahl die größte ist.

845. Die umtreibende Kraft bey gesagtem Winkel ist ganz sicher die größte, so lang nur das Gleichgewicht zwischen der Kraft und dem Widerstande ist, oder die

Flügel ruhen. Bey der Bewegung könnte es wohl anders seyn: gleichwie deßwegen schon vielfältig, Hrn. **Parent** und **Belidorn**, Vorwürfe gemacht worden, daß sie auch in der Bewegung bey diesem Winkel die größte Wirkung gesetzet haben (**Karsten Mathemat.** VI. Th. X. 198). Weßwegen **Dan. Bernouilli**, **Maclaurin**, **Schober**, **Euler** weitere Untersuchungen angestellet; und Herr Karsten dem letztern in seiner großen Rechnung folget. Allein diese kann ebenfalls nicht bestehen; da sie auf den alten Grundsatz der respektiven Geschwindigkeit gebauet ist. Es wird also nicht unnütz seyn, auch hierüber, eine Rechnung beyzufügen.

846. Wir wollen setzen, die rechtwinklichte Fläche ABDC (Fig. 327) drehe sich durch die Kraft des Windes, dessen Richtung parallel mit GP ist, um diese Line GP als um die Achse, welche mit der Line GE, die die Fläche ABDC halbiret, einen rechten Winkel PGE machet. Des Windes Geschwindigkeit sey $\sqrt{a}$, oder die Höhe, worauf sie sich bezieht, a. Es versteht sich aber durch a die umtreibende Kraft; so daß, wenn p die perpendikulare, $a = pssc$ sey (843). Mit derselben Geschwindigkeit $\sqrt{a}$ bewege sich auch der äuserste Punkt E der gesagten Line GE. Ist nun diese Line $GE = r$, und ein Theil derselben $GF = x$: so ist die Geschwindigkeit des Punktes F, $\frac{x\sqrt{a}}{r}$; mithin, wenn $AB = b$ ist, die **antreibende Kraft** im Puukte F, $= (a - \frac{x^2 a}{r^2})bdx$; und die ganze von dem Theile der Fläche, dessen Höhe x ist, $abx - \frac{abx^3}{3r^2}$; und von der ganzen Fläche, wann nämlich $x = r$ wird, $abr - \frac{abr}{3} = \frac{2}{3}abr$.

847.

847. Das **Moment** von $(a - \frac{x^2 a}{r^2})bdx$ ist $(a - \frac{x^2 a}{r^2})bxdx$; folglich das **ganze** von x, $\frac{abx^2}{2} - \frac{x^4 ab}{4r^2}$; und von der ganzen Fläche, wann $x = r$ wird, $\frac{abr^3}{2} - \frac{abr^3}{4} = \frac{1}{4} abr^3$.

843. Es ist daher die **Entfernung des Mittelpunkts der antreibenden Kraft der ganzen Fläche von der Achse G**, $= \frac{1}{4} abr^2 : \frac{2}{3} abr = \frac{3}{8} r$.

849. Setzen wir auch, der Punkt E der Fläche drehe sich mit einer kleinern Geschwindigkeit, nämlich mit $\sqrt{c}$, so daß $a' + c = a$ ist. So wird, wenn alles bleibt, wie vorher, des Punktes F Geschwindigkeit $\frac{x\sqrt{c}}{r}$ und seine **antreibende Kraft** $(a - \frac{x^2 c}{r^2})bdx$ seyn; und die ganze von x, $abx - \frac{bcx^3}{3r^2}$, und von der ganzen Fläche, wann $x = r$ wird, $abr - \frac{bcr}{3} = br\,(a - \frac{c}{3})$.

Das **Moment** von $(a - \frac{x^2 c}{r^2})\,bdx$ ist $(a - \frac{x^2 c}{r^2})bxdx$; und das ganze von x, $\frac{abx^2}{2} - \frac{bcx^4}{4r^2}$; und

von der ganzen Fläche, wann $x = r$ wird, $\frac{abr^2}{2} - \frac{bcr^2}{4} = br^2\frac{(2a-c)}{4}$.

Daher ist die **Entfernung des Mittelpunktes des Druckes der ganzen Fläche von der Achse G**, $br^2(\frac{2a-c}{4}) : br(a - \frac{c}{3}) = r\frac{3(2a-c)}{4(3a-c)}$.

Setzet man in diesen Formeln $a'+c$ statt $a$: so ist

1) $br(a-\frac{c}{3}) = br(a'+c-\frac{c}{3}) = br(\frac{3a'+2c}{3})$;

2) $br^2\frac{(2a-c)}{4} = br^2\frac{(2a'+2c-c)}{4} = br^2\frac{(2a'+c)}{4}$;

3) $r\frac{3(2a-c)}{4(3a-c)} = r\frac{3(2a'+2c-c)}{4(3a'+3c-c)} = r\frac{3(2a'+c)}{4(3a'+2c)}$.

In diesen dreyen Formeln kann man $a'$ und $c$ veränderlich setzen. Vermindert sich $c$ bis es null wird; so ist $a' = a$: und diese Ausdrücke gelten für den Stand des Gleichgewichtes, in der Ruhe. So ist dann die **Kraft des Gleichgewichtes** $abr$; **ihr Moment** $\frac{abr^2}{2}$; **und die Entfernung des Mittelpunkts von der Achse**, $\frac{1}{2}r$.

Vermindert sich $a'$ bis es null wird; so ist $c = a$: und es ist die **antreibende Kraft in der Bewegung**

gung $\frac{2abr}{3}$; ihr Moment $\frac{abr^2}{4}$; und die Entfernung des Mittelpunkts von der Achse, $\frac{3}{5}r$; alles wie oben (848), wie es seyn muß.

850. Will man aber wissen, wann die Wirkung größer ist; da, wann des Flügels äuserster Punkt E des Windes Geschwindigkeit $\sqrt{a}$; oder da, wenn er eine kleinere $\sqrt{e}$ hat: so muß man jedes Moment mit der dasigen Geschwindigkeit, nämlich $\frac{abr^2}{4}$ mit $\sqrt{a}$, und $br^2(\frac{(2a-c)}{4}$ mit $\sqrt{c}$ multipliciren; und sehen, welches Produkt größer ist; das erste $\frac{abr^2\sqrt{a}}{4}$ oder das andere $br^2(\frac{2a-c}{4})\sqrt{c}$.

Um es desto leichter zu finden, wollen wir $c = y$, veränderlich setzen; und diesen Ausdruck $(2a-y)\sqrt{y}$ differenziren: so haben wir $d(2ay^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}}) = \frac{ady}{\sqrt{y}} - \frac{3}{2}\sqrt{y}dy = 0$; wenn jener Ausdruck der größte seyn soll. Und in diesem Falle ist $y = \frac{2}{3}a$; das heißt:

Es ist die größte Wirkung des Windes, wann des Flügels äuserster Punkt E eine Geschwindigkeit hat, welche sich zu des Windes seiner verhält, wie $\sqrt{\frac{2}{3}}$ zu 1, beynahe wie 8165, zu 10000, oder 4 zu 5; und die Formel der größten Wirkung ist $br^2(\frac{2a-\frac{2}{3}a}{4})\sqrt{\frac{2}{3}a} = \frac{abr^2}{3}\sqrt{(\frac{2}{3}a)}$.

Vergleichet man diesen Ausdruck $\frac{abr^2}{3}\sqrt{(\frac{2}{3}a)}$ mit dem ersten $\frac{abr^2}{4}\sqrt{a}$; und seßet $a = 1$, und $\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}8165$: so ist $\frac{abr^2}{3}\sqrt{(\frac{2}{3}a)} = br^2 \times \frac{0{,}8165}{3} = br^2 \times 0{,}2721$; und $\frac{abr^2}{4}\sqrt{a} = br^2 \times \frac{1}{4} = br^2 \times 0{,}25$; Daher $\frac{abr^2}{3}\sqrt{(\frac{2}{3}a)} > \frac{abr^2}{4}\sqrt{a}$; wie es seyn muß; nämlich die Wirkung ist nicht so groß, wann des äuserſten Punktes des Windflügels Geschwindigkeit, der Geschwindigkeit des Windes $\sqrt{a}$ gleich; als sie damals ist, wann jene Geschwindigkeit 0,8165 von dieser ist.

851. Solche Windflügel, als wir bisher berechnet haben, können nur zwey an einer Welle seyn. Wollte man mehrere machen; so müßten sie sehr schmal seyn: weil sie sonst nicht bis an die Achse reichen könnten. Oder man muß die vorhergehenden Formeln wählen, worin x vorkommt; und statt dieses x die Distanz zwischen der Achse B (Fig. 326) und der Grundline FC der Windflügelfläche FD, und das x, nämlich, wenn diese Distanz e ist, $= e+x$ seßen. So wird man leicht, die antreibende Kraft, ihr Moment, und ihre Wirkung, in diesem Falle, finden können. Wir wollen sie nach dem 849 §. daher seßen.

Antreibende Kraft $ab(e+x) - \frac{bc(e+x)^3}{3r^2} + C = ab(e+x) - bc\frac{(e+x)^3}{3r^2} - abe + \frac{bce^3}{3r^2} =$

0,

o, wenn $x = o$ ist; und, wenn $e + x = r$ wird,

$= abr - \frac{bcr}{3} - abe + \frac{bce^3}{3r^2} = br\left(\frac{3a-c}{3}\right) - be\left(\frac{3ar^2-ce^3}{3r^2}\right)$.

Moment $\frac{ab(e+x)^2}{2} - \frac{bc(e+x)^4}{4r^2} - \frac{abe^2}{2} + \frac{bce^4}{4r^2} = o$, wenn $x = o$ wird; und, wenn $e + x = r$ werden, $= \frac{abr^2}{2} - \frac{bcr^2}{4} - \frac{2r^2abe^2 - bce^4}{4r^2} = br^2\left(\frac{2a-c}{4}\right) - be^2\left(\frac{2ar^2-ce^2}{4r^2}\right)$.

Die **Entfernung** giebt sich; wenn man das Moment durch die Kraft dividirt.

852. Will man auch in diesem Falle (851) die Geschwindigkeit wissen, bey welcher die Wirkung am größten ist: so darf man in dem Ausdrucke des Moments, $c = y$, veränderlich setzen, und ihn mit $\sqrt{y}$ multipliciren und von dem Produkte $br^2\left(\frac{2a-y}{4}\right)\sqrt{y} - be^2\left(\frac{2ar^2-e^2y}{4r^2}\right)\sqrt{y}$, oder von $2ar^4y^{\frac{1}{2}} - r^4y^{\frac{3}{2}} - 2ae^2r^2y^{\frac{1}{2}} + e^4y^{\frac{3}{2}}$ das Differenziale, nämlich $ar^4y^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{3}{2}r^4y^{\frac{1}{2}}dy - ae^2r^2y^{-\frac{1}{2}}dy + \frac{3}{2}e^4y^{\frac{1}{2}}dy = o$ setzen: so findet man $y = \frac{2ar^2(r^2-e^2)}{3(r^4-e^4)}$; oder die Geschwindigkeit des äußersten Punktes des Windflügels

gels zu der Geschwindigkeit des Windes, wie $\sqrt{(\frac{2r^2(r^2-e^2)}{3(r^4-e^4)})}$ zu 1.

Wenn $e = o$ wird: so entstehet der obige Ausdruck (850), wie es seyn soll.

853. Setzet man die Windflügel dreyeckig; so daß die Spitzen davon im Mittelpunkte des Kreißes zusammen kommen, den sie bey ihrer Umdrehung beschreiben, und die Grundline am Umfange, $= b$; und die Geschwindigkeit des äußersten Punktes $\sqrt{a}$; die **umtreibende Kraft** $k$; und das übrige wie vorher ist: so erhälet aus dem vorhergehenden, daß $dk = \frac{bx}{r}(a-\frac{x^2a}{r^2})dx$

$= (\frac{abx}{r} - \frac{abx^3}{r^3})dx$; und $k = \frac{abx^2}{2r} - \frac{abx^4}{4r^3}$; und wenn $x = r$ ist, $k = \frac{abr}{2} - \frac{abr}{4} = \frac{abr}{4}$ sey.

Ist das **Moment dieser Kraft** $m$: so ist $dm = (\frac{abx^3}{r} - \frac{abx^4}{r^3})dx$; mithin $m = \frac{abx^3}{3r} - \frac{abx^5}{5r^3} =$ (wenn $x = r$ ist) $\frac{abr^2}{3} - \frac{abr^2}{5} = \frac{2abr^2}{15}$ und die **Entfernung ihres Mittelpunkts von der Achse** $\frac{2abr^2}{15} : \frac{abr}{4} = \frac{8}{15}r$.

854. Setzen wir auch die Geschwindigkeit des äußersten Punktes dieser spitzigen Windflügel (853) kleiner als des Windes seine $\sqrt{a}$, nämlich $\sqrt{c}$, wie oben: so

ist

ist $dk = (\frac{abx}{r} - \frac{bcx^3}{r^3})dx$; und $k = \frac{abx^2}{2r} - \frac{bcx^4}{4r^3}$

$= (\text{wenn } x = r \text{ ist}) \frac{abr}{2} - \frac{bcr}{4} = br(\frac{2a-c}{4})$.

Das unendlichkleine Moment ist $dm = (\frac{abx^2}{r} = \frac{bcx^4}{r^3})dx$; und das ganze $m = \frac{abx^3}{3r} - \frac{bcx^5}{5r^3} = \text{wenn } x = r \text{ ist}, \frac{abr^2}{3} - \frac{bcr^2}{5} =$

$br^2(\frac{5a-3c}{13})$.

Die Entfernung des Mittelpunkts dieser Kraft von der Achse ist $br^2(\frac{5a-3c}{15}) : br(\frac{2a-c}{4})$

$= r\frac{4(5a-3c)}{15(2a-c)}$.

855. Will man auch in diesem Falle (854) die Geschwindigkeit $c = y$ wissen, bey der die Wirkung am Größten; so ist $d(br^2\frac{(5a-3y)}{15}\sqrt{y})$

oder $\frac{5a}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy = o$ zu setzen: wodurch man $9y = 5a$; und $y = \frac{5a}{9}$ findet.

856. Es ist aber wohl zu merken, daß bey diesen dreyeckigen Windflügeln die Grundline etwas gebogen seyn sollte, so daß alle Theile derselben von der Achse gleichweit entfernt wären: wenn die Rechnung vollkommen genau seyn soll. Ist sie gerad: so ist die Wirkung

etwas größer, als die die Rechnung giebt. Und so sollten auch die viereckigen Windflügel ganz schmal seyn; wenn die Rechnung genau seyn soll: bey breiten ist die Wirkung auch etwas größer als die bisherige Rechnung giebt. Doch ist sie schon hinlänglich die Wirkung dieser Maschinen einzusehen; und zur Ausübung nahe genug zu bestimmen: darum laß ich es dabey bewenden.

857. Will man recht große Wirkung haben; so muß man recht große Windflügel machen, und die Dreyeckigen wählen: weil diese am Umfange sehr breit seyn können. Und will man überall die größte Wirkung; so muß man in den Ausdruck des Moments den Werth des Quadrats der Geschwindigkeit c für diese Wirkung setzen; wie auch den Flügeln die Stellung geben, daß ihre Grundline mit der Achse den oben (844) bestimmten Winkel vom $54^\circ\ 45'$ mache.

Bey den viereckigen Windflügeln, deren Fläche bis zur Achse geht, ist dieses Moment $\frac{abr^2}{3}$, (850).

Bey denen, zwischen deren Fläche und der Achse ein Zwischenraum e ist, ist dieses Moment der größten Wirkung $br^2\left(\frac{a}{2} - \frac{ar^2(r^2-e^2)}{6(r^4-e^4)}\right) - be^2\left(\frac{a}{2} - \frac{ae^2(r^2-e^2)}{6(r^4-e^4)}\right)$, (851 u. 852).

Und bey den dreyeckigen Flügeln ist es $\frac{2abr^2}{9}$.

858. Man muß hier (857) aus dem ersten und letzten Ausdrucke der Momente der größten Wirkung nicht

schlie-

schließen, daß die Wirkung der viereckigen Flügel größer, als der dreyeckigen sey. Denn man muß bedenken, daß die Fläche des viereckigen Flügels br, und des Dreyeckigen $\frac{br}{2}$, folglich diese nur halb so groß, als jene sey. Sollten also die Flächen gleich seyn; so müßte man in den Ausdruck des Moments der dreyeckigen Flügel 2b statt b setzen: und so verhielte sich das Moment des viereckigen zu dem Momente des dreyeckigen Flügels, wie $\frac{abr^2}{3} : \frac{4abr^2}{9} = 9:12 = 3:4$. Hieraus muß man aber auch noch nicht auf die Wirkung schließen; sondern vorher jeden Ausdruck mit der beßten Geschwindigkeit multipliciren; den ersten mit $\sqrt{\frac{2}{3}}a$, (850); und den andern mit $\sqrt{\frac{5}{9}}a$, (855). Dadurch findet man das Verhältniß der größten Wirkung des viereckigen Flügels zu der vom gleichgroßen dreyeckigen $\frac{abr^2}{3}\sqrt{(\frac{2}{3}a)} : \frac{4abr^2}{9}\sqrt{(\frac{5}{9}a)} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} : \frac{4}{9}\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\times 0{,}8165 : \frac{4}{9}\times 0{,}7459 = 0{,}2722 : 0{,}3312 = 9:11$ beynahe. Etwas ist dieses Verhältniß 9 : 11 zu groß; und 10 : 12 ist etwas zu klein. **Doch ist die Wirkung der Dreyeckigen größer, als der viereckigen**; beynahe im Verhältniß 6 : 5 oder 11 . 9.

859. Jene Momente (857) haben den Nutzen, daß man darnach die Maschine leicht einrichten und aufs beßte bauen kann. Denn man darf diese nur so zurichten, daß das Moment der Last jenem Momente der Flügel, die man wählet, gleich sey; und so wird die Bewegung mit der oben bestimmten Geschwindigkeit folgen.

Wir wollen z. B. dreyeckige Flügel berechnen; weil diese die größte Wirkung hervorbringen, und ihre Berech-

rechnung, wann ihre Grundline die erfoderliche Krümme hat (856) die genaueste ist.

Setzen wir also ihre Fläche betrage 144 Quadratschuh, ihre Anzahl 4, die Länge von einem 12 Schuh, = r, folglich der Flächen Inhalt von einem 36, und die Grundline 6 Schuh = b. Des Windes Geschwindigkeit setze ich für eine Sekunde 24 Schuh; folglich die dazu gehörige Höhe p = 9′,54. Diese p mit css multiplicirt giebt p. css = 9,54.0,3849 = a, (844 u. 846).

Nehmen wir nun den Ausdruck des Moments für einen Flügel $\frac{2abr^2}{9}$, (857): so müssen wir diesen für 4 Flügel noch mit 4, und um den Werth im Gewicht zu bekommen diesen $\frac{8abr^2}{9}$ noch mit $\frac{7}{8\,0}$ multipliciren, wenn das Gewicht eines Kubikschuh Luft $\frac{7}{8\,0}$ Pf. ist.

Demnach wäre der ganze Ausdruck $\frac{7abr^2}{90} =$

$\frac{7.9,54.0,3849.6.12.12}{90} = 246,7584$. Dividiret man dieses Moment 246,7584 durch die Entfernung der Kraft $\frac{8r}{15} = \frac{8.12}{15} = \frac{32}{5}$: so findet man für die antreibende Kraft k = 37,388 Pfund.

Wäre der Welle Halbmesser 1 Schuh: so wäre hieran sowohl die Last als ihr Moment 246,7584 Pfund.

860. Die bisher beschriebenen Räder und Windflügel werden bey verschiedenen zusammengesetzten Maschinen angewendet, wodurch entweder Läste gehoben, oder andere Sachen zermalmet, zerrieben, poliret werden, dergleichen die Stampfmühlen, Mahlmühlen, Sägmühlen, Bohrmühlen, Schleifmühlen ꝛc. sind. Allein da sie meistens aus den schon beschriebenen einfachen Hebzeugen bestehen: so gehen wir in keine weitere Beschreibung solcher Maschinen hinein; sondern lassen den Liebhaber derselben, sich die Begriffe davon aus den Schauplätzen der Maschinen und Künste, oder aus den Modellen in verschiedenen Kunstsälen selbst sammeln; und die bisher gegebene Theorie, im erfoderlichen Falle, nach Belieben anwenden. Noch wollen wir handeln,

# Von einigen Maschinen, durch welche Wasser gehoben wird.

861.

Solche Maschinen, wodurch Wasser gehoben wird, giebt es gar verschiedene; sie heißen **Schaufelwerke, Püschelkünste, Kastenkünste, Schöpfräder, Wasserschrauben, Druckwerke, Saugwerke**, ꝛc.

862. Ein **Schaufelwerk** wird durch die 329 und 330 Fig. vorgestellet, wie man es von der Seite und im Grunde sieht. ABCD ist der **Schaufelkranz**, der aus einer hölzernen Kette bestehet, woran kleine viereckige Breter sind, die **Paleten** oder **Schaufeln** heißen.

ßen. Dieser Kranz gehet über zwey **Wellen**, oder **Trillinge** G u. H; die lange **Speichen**, welche die Glieder der Kette fassen, haben; und zugleich mit zwey **Kurbeln** IK versehen sind. Da diese zwey Wellen weit von einander entfernt sind: so liegen die Theile des Kranzes darzwischen auf **zwey** aneinander befestigten **Rinnen** FG und LM. Die **unterste Rinne** wird unten in E, ins Wasser gestellet, und das obere Ende F aufgerichtet; so daß der Boden der Rinne EF eine schiefe Ebene vorstellet, oder mit dem Horizonte einen spitzigen Winkel machet. Drehet man sodann die obere Welle mittelst der Kurbeln um; so daß die Schaufeln auf der untern Rinne EF hinauf und auf der obern hinab steigen: so schieben sie das Wasser vor sich hinauf; so daß es oben, in F, aus der Rinne herausfällt.

863. Zu Straßburg hat man zwey solche Schaufelwerke. Eines gehöret der Stadt; das andere der Fortification. Wie Belidor beschreibt; so haben die Schaufeln des ersten zur Breite $9\frac{1}{2}$ Zoll, zur Höhe 6 Zoll, und zur Dicke I Zoll, und auf jeder Seite 3 Linen Spielraum: und die Weite von einander ist der Höhe gleich, nämlich 6 Zoll. Bey dem andern sind die Schaufeln II Zoll breit, 4 Zoll hoch, und 8 Zoll weit; und ihr Spielraum ist 6 Linen, auf jeder Seite.

Das von der Stadt soll, in einerley Zeit, noch über die Hälfte mehr Wasser schöpfen, als das andere, welches zum Festungsbau gehöret. Hiedurch hat Belidor die Gelegenheit genommen, eine Rechnung zu machen, wodurch er für die größte Wirkung dieser Maschine das Verhältniß der Höhe zur Länge der Rinne 2 : 5, oder ihren Neigungswinkel von 24 Grad 21 Minuten bestimmet; wenn die Weite der Schaufeln, ihrer Höhe gleich ist.

864. Es kommt hier nur darauf an, was man durch die größte Wirkung versteht. Versteht man dadurch, daß einerley Kraft bey verschiedener Neigung der Rinne verschiedene Wirkung, und bey einer die größte hervorbringen kann; so streitet dieses mit der Theorie der schiefen Ebene: indem da bey dem Stande des Gleichgewichtes die Kraft zu der zuhebenden Last sich jederzeit, wie die Höhe zur Länge derselben verhalten muß; wenn der Kraft Richtung mit der Länge parallel ist; wie es hier beym Schaufelwerke ist. Da sich nun hierbey noch ein Wellrad, oder Hornhaspel befindet; und also das ganze Werk nur aus der schiefen Ebene und diesem Haspel zusammengesetzet ist: so erhellet schon ganz aus dem ersten Theile unserer Mechanik, wie die Rechnung zu machen. Ist nämlich der schiefen Ebene Höhe a, ihre Länge oder Hypothenuse h, des Trillings Speiche oder Radius r, des Haspelhornes Länge R, die Last oder Schwere des gesammten auf der schiefen Ebene zwischen den Schaufeln befindlichen Wassers L, und die am Haspelhorne angewandte Kraft k: so ist im Stande des Gleichgewichts $Lar = khR$. Daher ist $k = \frac{Lar}{hR}$, und muß sich jederzeit mit der Höhe a verändern; wenn die andern Größen beständig sind. Hat dabey die Kraft eine Geschwindigkeit G: so muß die Last nothwendig auch eine g haben; so daß $g : G = ar : hR$ ist. Und es findet sich da in diesem Verstande kein Maximum.

Nimmt man aber in diesem Ausdrucke $Lar = khR$, h beständig, $R = r = 1$ und $a = x$, samt L und k veränderlich, an; so daß $Lx = kh$ ist: so läßt sich da vielleicht ein Maximum finden; so daß bey einer gewissen Neigung der Rinne sowohl das Produkt Lx als das Kh das größte aus allen ist. Wir wollen es versuchen.

865. Setzen wir den Neigungswinkel vom Schaufelwerke BAC (Fig. 331): und die Höhe der Schaufeln sey FE = HD = c, und die Weite von zweyen HF = b = DE. Die Länge der schiefen Ebene AB sey h, und ihre Höhe BC = x. Wenn nun DG horizontal und parallel mit AC ist: so wird das Trapez HDGF das Wasser vorstellen, welches zwischen diesen zweyen Schaufeln HD und FE befindlich ist; weil die Breite der Schaufeln überall einerley ist. Nun ist das Dreyeck EDG dem Dreyecke CBA ähnlich, und es ist $AC : CB = DE : EG$, das ist, $\sqrt{(h^2 - x^2)} : x = b : EG$

$= \frac{bx}{\sqrt{(h^2 - x^2)}}$; folglich das Dreyeck $DEG = \frac{b}{2} \times \frac{bx}{\sqrt{(h^2 - x^2)}}$ und das Trapez $HDGF = bc - \frac{bbx}{2\sqrt{(h^2 - x^2)}} = L$, der Last gleich, oder dafür anzunehmen. Daher ist $Lx = bcx - \frac{bbx^2}{2\sqrt{(h^2 - x^2)}}$;

und $kh = bcx - \frac{bbx^2}{2\sqrt{(h^2 - x^2)}}$; und $k = \frac{bcx}{h} - \frac{bbx}{2h\sqrt{(h^2 - x^2)}}$. Soll dieser Ausdruck der größte seyn, der möglich ist: so ist $dk = \frac{bcdx}{h} - \frac{b^2}{2h}$

$\left(\frac{2xdx \times \sqrt{(h^2 - x^2)}}{h^2 - x^2} + \frac{x^3 dx}{\sqrt{(h^2 - x^2)(h^2 - x^2)}}\right) = 0$; daher $c = \frac{b}{2}\left(\frac{2x(h^2 - x^2) + x^3}{\sqrt{(h^2 - x^2)(h^2 - x^2)}}\right)$; und

$c\sqrt{(h^2 - x^2)(h^2 - x^2)} = \frac{b}{2}(2x(h^2 - x^2) + x^3)$; und

$4c^2(h^2 - x^2)^3 = b^2(4x^2(h^4 - 2h^2x^2 + x^4) + 4h^2x^4 - 4x^6 + x^6)$;

und, wenn $b = c$, und $h = 1$ ist,

$4(1 - 3x^2 + 3x^4 + x^6) = 4x^2 - 8x^4 + 4x^6 + 4x^4 - 4x^6 + x^6$;

Da-

Daher $4 - 16x^2 + 16x^4 + 3x^6 = 0$; mithin $4 < 16x^2$; oder $x^2 > \frac{1}{4}$; und $16x^4 < 16x^2$; oder $x^2 < 1$.

Setzet man solche verschiedene Werthe, die kleiner als 1 und größer als $\frac{1}{4}$ sind statt $x^2$, in die vorige Gleichung; oder suchet man auf was für eine Art den Werth von $x^2$: so wird man finden, daß er etwas kleiner als $\frac{1}{2}$, und zwar beynahe 0,40518396 folglich $x = 0{,}63654$, und der Winkel BAC kleiner als 45 Grad, nämlich ungefähr 39° 32' sey;

In diesem Falle ist also ein Maximum; das ist, es wird durch das vorhandene Schaufelwerk bey dem Neigungswinkel von beynahe 39° 32' von einer proportionirten Kraft die größte Menge Wasser auf die größte Höhe gehoben; so daß nämlich das Produkt der Menge von Wasser in die Höhe des größte sey, so möglich ist.

866. Dieses zu wissen ist also gut; wenn man just diese Wirkung der Maschine verlangte, und man die erfoderliche Kraft anwenden kann, die man nach der Formel $k = \frac{Lar}{hR}$ findet.

Es versteht sich, daß mehr Wasser gehoben wird wenn der Winkel kleiner als 39° 32' ist; aber auf eine kleinere Höhe.

867. Da nun die zwey Schaufelwerke zu Straßburg unter dem Winkel von 45° angewendet worden; so ist dann sowohl der Winkel, als ihr Bau die Ursache der verschiedenen Wirkung; und man sieht gleich aus der oben gegebenen Beschreibung ihrer Schaufeln und des Spielraumes, daß das Schaufelwerk beym Festungsbau nicht so viel Wirkung machen kann, als das bey der Stadt. Denn die Schaufeln des ersten sind zu seicht, zu weit, und ihr Spielraum zu groß. Offenbar ist es, daß

das Schaufelwerk, welches größere, höhere und breitere und engere Schaufeln und weniger Spielraum als ein anderes hat, bey der erfoderlichen Kraft mehr Wirkung machen müsse als das andere: aber **ein Größtes in der Wirkung der Kraft giebt es nicht.**

868. Eine **Püschelkunst** (Paternosterwerk, Rosenkranz) stellet die 332 Fig. vor. Es ist von dem Schaufelwerk dadurch unterschieden, daß statt der schiefen Rinne, eine senkrechte Röhre ist, wodurch die Kunstkette mit den Püscheln oder Scheiben geht, welche in der Bewegung das Wasser vor sich hinauf stoßen. Zur Berechnung läßt sich die vorige Formel (866) anwenden: nur mit dem Unterschiede, daß a = h, folglich Lr = kR ist.

869. Eine **Kasten- oder Eimerkunst** wird durch die 333 Fig. vorgestellet: wo viele Kasten oder Eimer an einem oder zwey Seilen in einen Kranz vereiniget sind, der oben über einen Trilling und unten durch das Wasser geht, woraus die Eimer in der Bewegung schöpfen, und es oben ausgießen. Die Berechnung geschieht, wie bey der Püschelkunst durch die Formel Lr = kR; wenn oben am Trillinge nur eine Kurbel angebracht ist.

870. Ein **Schöpfrad** stellt die 334 Fig. vor, welches wie ein anderes Wasserrad gemacht ist, aber an seinem Umfange kleine befestigte Kasten, mit Oeffnungen hat, welche unten Wasser fassen, und oben ausschütten. Wenn hier in der vorigen Formel durch r die Höhe auf welche das Wasser gehoben wird, oder des Rades Durchmesser, und durch R der Raum durch welchen sich die Kraft in derselben Zeit bewegt, oder des Rades Umfang verstanden wird: so dienet sie ebenfalls zur Berechnung dieses Rades. Es giebt auch noch andere Schöpfräder, woran die Kasten oder Eimer beweglich sind; und

sol-

solche, die inwendig hol sind, das Wasser unten an der Circumferenz auffangen und in der Mitte durch die Welle ausgießen, wie das **Tympanum** der Alten war.

871. Die **archimedische Wasserschraube** wird durch die 335. Fig. vorgestellt. Sie besteht aus einem Zylinder, um welchen eine Röhre in der Gestalt der Schraubengänge gewunden ist. Stellet man diesen Zylinder so schief, daß das Wasser unten durch die Oeffnung in die Röhre treten und darin etwas, wie auf einer schiefen Fläche hinab fallen kann; und drehet so dann diesen Zylinder dergestalt um seine Achse, daß die untere Oeffnung der Röhre stets gegen das Wasser beweget wird: so steiget das Wasser in der Röhre hinauf, bis es aus der obern Oeffnung heraus rinnt. Statt der Röhre können auch Canäle, einer oder mehrere, in den Zylinder, in Gestalt der Schraubengänge, eingeschnitten seyn.

872. **Vitruv, im XI Kap. des X Buches,** lehret den Bau dieser Schraube. **Pitot, in den Abhandl. der Pariserakademie vom Jahr 1736,** und andere Autorn geben davon andere verschiedene Zurichtungen an. **Herr Hennert, in seinen mathemat. Anfangsgründen im V. Tom. und in seiner von der Berlinerakademie gekrönten Preisschrift** (worin aber eine unmögliche Bestimmung des Neigungswinkels für die größte Wirkung gemacht wird) beschreibt die 1756 zu Leiden verfertigte Wasserschrauben, die vom Winde beweget werden. Eine jede hatte drey Gewinde oder Gänge, deren jeder an dem kreißförmigen Durchschnitte der Grundfläche von dem andern 120 Grad entfernt ist. Der Zylinder, an dem diese Schraubengänge sind, ist $14\frac{1}{2}$ Schuh lang; und der Halbmesser der Grundfläche hat 2′ 9″. Der Winkel, den die Schraubengänge mit der Peripherie der Grundfläche ma-

chen, hat 11° 55'; der Winkel, den die Neigung der Grundfläche mit dem Horizonte machet, 30°; und der Winkel, den die Achse mit dem Horizonte machet, 60°. Die Menge Wasser, welche in einer Minute gehoben wurde, waren 273 Kubikschuh; sechs bis siebenmal so viel, als von den gewöhnlichen Druckwerken gehoben wird. Aber diese haben den Vorzug vor den Wasserschrauben, daß sie das Wasser viel höher heben.

873. **Herr Daniel Bernoulli** hat **in seiner Hydrodynamik, im IX Abschnitte**, zuerst über diese sinnreiche Ordnung eine Berechnung angestellet. **Hr. Euler** hat hernach diese Materie in **dem V Tom der neuen Denkschriften zu Petersburg** ganz allgemein abgehandelt, und das Element der Kräfte und Widerstände, welche aus der Kreißbewegung entstehen, mit in die Rechnung gebracht. Allein diese Formeln, mit welcher dieser große Analist diese Untersuchungen ausgedehnet hat, gehören mehr zur Algebra, als zur Mechanik; und können, wie **Krisi** sagt, wegen ihrer Verwickeluug nicht angewendet werden.

874. Um sich die ganze Ordnung und Wirkung der Wasserschraube besser vor Augen zu stellen, bilden wir uns ein, ABDC (Fig. 336) sey ihre **Grundfläche, AFEG** ein **ganzer Schraubengang**; und die **Seitenlinen HI, BF, LM, lm, DE, PO, QR, AG**; welche alle so wohl unter sich als mit des Zylinders Achse parallel sind, und sich wie die dazu gehörigen Bögen der Grundfläche verhalten, nämlich wie **AH, AB, AL, Al, ABD, ABDP, ABDQ, ABDQA**: und so verhalten sich auch die dazu gehörigen Bögen des Schraubenganges, nämlich **AI, AF, AM, Am, AE, AEO, AER, AEG**; das ist, **AH : AB : AL : Al : ABD : ABDP : ABDQ : ABDQA = HI : BF : LM : lm : DE**

DE : PO : QR : AG = AI : AF : AM : Am : AE: AEO : AER : AEG.

Diese Wasserschraube sey auf dem Horizonte SDX schief aufgerichtet, so daß ihr **Neigungswinkel**, welchen ihre Achse ZX, oder eine Seite DE damit machet EDS sey, dessen Sinus wir allezeit = S setzen, und seinen Cosinus C, welcher der Sinus seines Complements, das ist, des Winkels ADX ist, welchen die Grundfläche mit dem Horizonte machet.

Die Winkel, welche der Schraubengang mit den Seitenlinen machet, sind alle gleich, nämlich AIH = AFB = AML, u. s. w. Diesen Winkel wollen wir den **Seitenwinkel**, und seinen Sinus stets s heißen.

Die Winkel, welche die Seitenlinen mit dem Umkreiße der Grundfläche oder eines andern kreißförmigen Durchschnittes machen, sind alle rechte Winkel, von 90°, nämlich IHA = FBA = 90; u. s. w. Daher machet der Winkel IAH zwischen dem Schraubengange und Umkreiße der Grundfläche, welcher der **Schraubenwinkel** oder **Kreißwinkel** heißen mag, mit dem Seitenwinkel AIH, 90°; und sein Sinus ist der Cosinus von diesem, nämlich c.

875. Wie die Figur 336 weiset, so ist da in dem Schraubengange AEG ein Punkt M, welcher niedriger ist als alle Punkte neben ihm sind; so daß ein Körper sowohl von F als von E nach M laufen, und endlich in M ruhen würde. Wir wollen **diesen niedrigsten Punkt M zu bestimmen** suchen.

Der dem Bogen AM des Schraubenganges zugehörige Zirkelbogen AL sey x, und seine Abscisse, oder

sein Quersinus $AN = y$: so ist, weil $AL : LM = s : c$, $x : LM = s : c$; und $LM = \frac{cx}{s}$.

Die Höhe MT dieses Punktes M über dem Horizonte SX ist $= MV + VT$: wo $MV : LM = S : 1$, wenn die ganze Sin $= 1$ ist; und $VT : DN = C : 1$ ist; mithin $MV = LM \times S = \frac{Scx}{s}$; und $VT = DN \times C =$ (wenn der Grundfläche Radius $AC = r$ ist) $(2r - y)C$; daher $MT = u = \frac{Scx}{s} + (2r - y)C$.

Soll diese Höhe u die kleinste seyn, die möglich ist: so ist $du = \frac{Sc}{s}dx - Cdy = \frac{Scrdy}{s\sqrt{(2ry - yy)}} - Cdy = 0$, weil nach des Zirkels Eigenschaft, $dx = \frac{rdy}{\sqrt{(2ry - yy)}}$ ist; folglich $Scr = Cs\sqrt{(2ry - yy)}$; und $y = r \pm \sqrt{(r^2 - \frac{S^2c^2r^2}{C^2s^2})} = r \pm r\sqrt{(1 - \frac{S^2c^2}{C^2s^2})}$; der Werth des Quersinus AN bey des Schraubenganges niedrigstem Punkte M.

876. Weil da aber ein doppelter Werth, ein bejahender und ein verneinender ist: so zeiget der erste $r + r\sqrt{(1 - \frac{S^2c^2}{C^2s^2})}$ eigentlich den Quersin AN bey dem niedrigsten Punkte M; und der andere $r - r\sqrt{(1 - \frac{S^2c^2}{C^2s^2})}$ den Quersin AK beym höchsten Punkte I des Schraubenganges.

Nen-

877. Nennet man also den **dem höchsten Punkte I zugehörigen Bogen AH**, und den **dem niedrigsten Punkte M zugehörigen Bogen DL**; so sind sie beide gleich: weil ihre Cosine gleich, $KC = CN = \sqrt{(1 - \frac{S^2c^2}{C^2s^2})}$; und so auch ihre Sine gleich, $KH = NL = \frac{Sc}{Cs} = \frac{S}{C} \times \frac{c}{s}$. **Und man bekommt eines jeden Sinus**: wenn man 1) den Sinus S der Neigung der Wasserschraube durch ihren Cosinus C dividiret; 2) den Cosinus c des Seitenwinkels durch seinen Sinus s dividiret; und 3) diese beiden Quotienten mit einander multipliciret.

878. Eines jeden dieser Bögen Sinus wird $BC = I$, oder beide Punkte, der höchste und niedrigste fallen in einen F zusammen; wenn $\frac{Sc}{Cs} = I$, oder $Sc = Cs$ wird, oder der Seitenwinkel AFB dem Neigungswinkel EDS gleich ist.

879. Wird aber der Seitenwinkel kleiner als der Neigungswinkel, oder dieser größer als jener: so wird $Sc > Cs$; folglich unmöglich, daß $\frac{Sc}{Cs}$ eines Bogens Sinus sey, weil wir den größten, den ganzen Sinus $= I$ gesetzet haben; und auch unmöglich, daß ein niedrigster Punkt sey, auf dessen Seiten alle beide höher sind; oder ein höchster Punkt, auf dessen Seiten beide niedriger sind.

880. Setzen wir aber, es sey ein niedrigster Punkt M, oder der Neigungswinkel EDS sey kleiner als der Seitenwinkel AFB; und denken wir, es liege in diesem Punkte M ein Körper; und die Schraube drehe sich um

ihre Achse von B nach A, so daß der Punkt gehoben werde, und der nahe Punkt m einen kleinen Bogen ma = lL beschreibe: was wird geschehen? wird der Körper im Punkte M bleiben und sich mit diesem fortbewegen? oder wird er diesen Punkt M verlassen? und wo wird er hinkommen?

Der Punkt M erhebt sich, nimmt eine höhere Stelle ein: also kann der Körper nicht darauf bleiben; sondern er muß auf Mm hinabglitschen; so daß, wann m in a kommt, der Körper in a, welches wieder der niedrigste Punkt seyn wird, kommen muß: und so steigt der Körper durch Umdrehung der Schraube auf die Verlängerung der Seitenline LM des niedrigsten Punktes M ganz hinauf.

881. Was wird da nun wohl für eine Kraft an der Peripherie der Schraube, deren Richtung die Tangente dieser Peripherie ist, erfodert, um dem im niedrigsten Punkte M liegenden Körper das Gleichgewicht zu halten?

Es sey das Gewicht dieses Körpers q. Denken wir nun in M einen kreißförmigen Durchschnitt der Schraube, welcher mit der Grundfläche parallel ist; und daß der Körper da nach einer Richtung zu fallen trachte, welche parallel mit AD ist: so wird diese Kraft, mit der er also hinab trachtet, q.C seyn; und sein Moment $qC \times NL = qC \times \frac{Scr}{Cs} = q\frac{Scr}{s}$; Da der Kraft k ihres kr ist. Folglich ist $kr = q\frac{Scr}{s}$;

oder $k = q\frac{Sc}{s}$.

882.

882. Indessen die Schraube sich einmal umdreht, muß sich der Körper parallel mit der Achse durch einen Raum bewegen, welcher der Gangweite $AG = u \frac{c}{s}$ gleich ist, wo u der Umfang der Grundfläche ist; folglich senkrecht durch eine Höhe, welche $= u \frac{cS}{s}$ ist: da sich indessen die Kraft k durch die Peripherie u beweget. Folglich hat man auch für den Stand des Gleichgewichtes $ku = qu \frac{cS}{s}$, oder $k = q \frac{cS}{s}$, wie vorher; eine Probe der Richtigkeit, da beide Rechnungen übereinstimmen.

883. Mit welcher Geschwindigkeit wird sich aber der in was immer für einem Punkte des schiefen Bogens IM befindliche Körper bewegen können?

Ich will setzen, der Körper befinde sich da auf irgend einem Punkte, wo man den unendlich kleinen Bogen als eine schiefe Ebene ansehen kann, deren Länge zu ihrer Höhe sich wie 1 zu n verhalte; so daß, wenn des Körpers absolute oder ungehinderte Schwere $= 1$ ist, diese gehinderte oder respektive, womit er längst dem unendlich kleinen Bogen hinab trachtet, $= n$ sey. Erlanget nun ein frey fallender Körper in einer Sekunde die Geschwindigkeit p: so muß die auf diesem kleinen Bogen in der unendlich kleinen Zeit dz erlangte Geschwindigkeit npdz seyn.

Ich setze ferner, man habe die Schraube mit einer stets zunehmenden Geschwindigkeit gedreht, die der Zeit proportionirt ist, wie beym Fallen der Körper; und diese Geschwindigkeit sey nun g, und ihr unendlich kleiner Wachsthum dg. Es muß also dieser $dg = npdz$ seyn.

Es sey ferner der dem vorher angezeigten unendlich kleinen Bogen des Schraubenganges, z. B. dem Mm zugehörige un-

unendlich kleine Zirkelbogen, Ll, oder ma = dx: folglich ist jener kleine Gangbogen $Mm = \frac{dx}{s}$: und, da dieser der vom Körper in der unendlich kleinen Zeit dz zurückgelegte Raum ist; so ist $\frac{dx}{gs} = dz$. Dieser Werth von dz in die Gleichung von dg gesetzt, giebt $dg = \frac{npdx}{gs}$. Daher ist $gdg = \frac{npdx}{s}$; und $\frac{g^2}{2} = \frac{npx}{s}$; oder $g^2 = \frac{2npx}{s}$; und $g = \sqrt{\frac{2npx}{s}}$.

Setzet man in dieser Gleichung statt x einen bekannten Bogen der Gründfläche, durch welchen sich die Kraft in einer gewissen Zeit z mit besagter Beschleunigung beweget hat: so kann man dadurch den Werth der Geschwindigkeit g finden, mit welcher sich der Körper in dem Augenblicke im Schraubenge, oder vielmehr dieser selbst, da der Körper nach der Seitenline steigt, zu bewegen trachtet.

384. Will man aber die Zeit z selbst wissen, in welcher der Bogen x zurückgeleget werden muß: so darf man nur diese Proportion setzen:

$$1'' : z = \sqrt{\frac{2npx}{s}} : \frac{2x}{s}.$$

Da findet man $z = \sqrt{\frac{2x}{np}}$.

Setzet man für den Bogen x den ganzen Umfang u der Schraube: so hat man für die Zeit z, in welcher sie mit Beschleunigung einmal umgedrehet werden muß, den Werth $\sqrt{\frac{2u}{np}}$.

385. Nun kömmt es darauf an, was in diesem Ausdrucke $\sqrt{\frac{2u}{np}}$, der Werth von n ist. Da ist dann erstlich gewiß, daß beym niedrigsten M und höchsten Punkte I, n = o ist; und n sowohl von M als I angefangen bis F stets zunehme,

in-

indem da in F der höchste und niedrigste Punkt des Schraubenganges zusammen kommen können, und also F der Wendungspunkt dieser krummen Line IFM seyn müsse: und zwar ist da die Neigung des Schraubenganges gegen den Horizont, der Neigung der Grundfläche der Schraube, weniger den Kreißwinkel gleich: dessen Sinus $= C'$ seyn soll. Daher ist dann n, wann es am größten ist, $= C'$; und die kleinste Zeit der beschleunigten Umdrehung $z = \sqrt{\frac{2u}{C'p}}$.

886. Da sieht man, daß, wann ein Körper auf dem niedrigsten Punkte des Schraubenganges liegt, und man die Schraube mit stets zunehmender Geschwindigkeit umdrehet, der Körper den niedrigsten Ort verlassen und höher steigen müsse; und zwar bis in F, wann die Zeit der beschleunigten Umdrehung $z = \sqrt{\frac{2u}{C'p}}$ ist. Ist aber die Geschwindigkeit noch größer, oder diese Zeit noch kleiner als $\sqrt{\frac{2u}{C'p}}$: so wird der Körper mit im Kreiße herum gerissen, und steiget nicht mehr; wie ich bey den Modellen dieser Maschine oft erfahren habe.

887. Indessen zeiget doch der Ausdruck dieser Zeit, daß die Beschleunigung auch immer fort geschehen könnte; wenn sie nicht übertrieben wird, und dem Ausdrucke gemäß geschieht; so daß die Zeit in einer gewissen Anzahl a Umdrehungen, $= \sqrt{\frac{2au}{C'p}}$ ist.

888. Auch in der Seitenline LM des niedrigsten Punktes M kann ein Körper mit beschleunigter Geschwindigkeit hinauf, von L in M, steigen, wenn nach dem Verhältniß gedrehet wird, als der Werth von n für den dasigen unendlich kleinen Bogen erfodert; durch den der Körper sich stets hinab zu bewegen gedacht wird.

889. Imgleichen könnte man durch den Ausdruck $z = \sqrt{\frac{2u}{np}}$, wenn man z größer als $\sqrt{\frac{2u}{C'p}}$ annimmt, den Werth von n, oder den Sinus des Winkels finden, welchen der unendlich kleine Bogen mit dem Horizonte machen muß, auf

des-

dessen Seitenlinie der Körper sich hinauf bewegete. Es würde nämlich $n = \frac{2u}{pz^2}$ seyn.

890. Nun können wir leicht begreifen, wie das Wasser in der Wasserschraube hinauf steige. Steht nämlich die Schraube mit ihrer Grundfläche bis zum Höchsten Punkte H, oder K, des Schraubenganges im Wasser: so wird durch die Umdrehung, indem des Schraubenganges Oeffnung A von unten aus D herauf steigt, das Wasser in die Röhre hineintreten, und bey fernerer langsamen Fortdrehung endlich, nach der Fig. 336, in den Bogen IEO des Schraubenganges zu stehen kommen, an dem der Punkt O des obern Theiles EG mit dem höchsten Punkte I des nntern Theiles AE gleiche Höhe hat. Indessen kann auch der Punkt O mit in den untern Theil AE fallen, wenn der Neigungswinkel EDS der Wasserschraube größer wird. Dieser Bogen IEO heißet der **wassertragende Bogen.** Wir wollen seine Größe zu bestimmen suchen.

891. Suchen wir erst, wie viel der höchste Punkt I des untern Schraubenbogens AE höher als der niedrigste M ist.

Dieses zu bewerkstelligen, denken wir, die Schraube sey in diesen Punkten M und I kreißförmig oder parallel mit der Grundfläche AD durchschnitten. Die Durchmesser dieser Durchschnitte wollen wir in der 337. Fig. durch FG und BE vorstellen; und der Punkt L auf dem ersten Durchmesser FG soll mit dem niedrigsten Punkte M (Fig. 336), und H auf dem andern Durchmesser BC, mit dem höchsten Punkte I gleiche Höhe haben. Diese Punkte L und H (Fig. 337) sind das, was die Punkte N und K (Fig. 336) sind, welche mit L und H gleiche Höhen haben.

Wenn nun Fig. 337 XZ der Schraube Achse, BX der Horizont Hc und La parallel mit der Achse XZ, LS und Ya T parallel mit der Horizontale BX; so ist der Punkt H höher als L um HS = HT — ST.

Nun ist $aH = 2r\sqrt{(1 - \frac{S^2c^2}{C^2s^2})}$; mithin $HT = 2rC\sqrt{(1 - \frac{S^2c^2}{C^2s^2})} = 2r\sqrt{(C^2 - \frac{S^2c^2}{s^2})} = 2r\sqrt{(\frac{C^2s^2 - S^2c^2}{s^2})}$.

Nen-

Nennen wir den der Line aH zugehörigen Zirkelbogen, b (welcher HL (Fig. 336) iſt): ſo iſt b : aL = s : c; folglich $aL = \frac{bc}{s}$; und, da der Winkel LaY = ZXB iſt, aL : LY = $\frac{bcS}{s}$ : S; mithin $LY = \frac{bcS}{s} = ST$.

Daher iſt $HS = HT - ST = 2r\sqrt{\left(\frac{C^2s^2 - S^2c^2}{s^2}\right)} - \frac{bcS}{s}$, der Werth, wie viel der höchſte Punkt des untern Schraubenbogens höher als der niedrigſte iſt.

892. Suchen wir nun auch den im Stande des Gleichgewichtes mit Waſſer angefüllten Bogen IEO (Fig. 336). Es ſey der Seitenline PO = g zugehörige Zirkelbogen ABDP, = x; und deſſen Abſciſſe oder Querſinus Ao = y; ſo iſt x : g = s : c; und y : g = S : C; mithin $g = \frac{cx}{s} = \frac{Cy}{S}$; und $x : y = \frac{C}{S} : \frac{c}{s}$. Es iſt aber auch

$$x : y = x : \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2\,3.4.5.6} \ldots = 1 : \frac{x}{2} : \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{720} \text{ u. ſ. f.}$$

Daher iſt $1 : \frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{720} \ldots = \frac{C}{S} : \frac{c}{s}$; und

$$\frac{c}{s} \times \frac{S}{C} = \frac{Sc}{Cs} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{720} \text{ u. ſ. f.}$$

Setzet man alſo für das erſte Glied den Werth nach dem vorhandenen Falle: ſo kann man durch dieſe Gleichung den Werth des Bogens x mit Annäherung finden. Zieht man von dieſem gefundenen Bogen ABDP den bekannten AH ab; und ſetzet den Reſt HBDP = b: ſo findet man den waſſerführenden Bogen IEO = w, durch dieſe Proportion : b : w = s : 1; nämlich $w = \frac{b}{s}$.

893. In der Bewegung kann der wasserführende Bogen nicht so groß bleiben, als er erst gefunden worden; sondern das Wasser muß oben im höchsten Punkte I nothwendig mit fort nach A gerissen werden; so daß es nur so hoch steht, als die schiefe Fläche des Schraubenganges, ihm die mit der Umdrehung übereinstimmende Bewegung zuläßt: welches durch den oben (884) gegebenen Ausdruck der Zeit der beschleunigten Umdrehung $z = \sqrt{\frac{2u}{np}}$; oder durch den Werth der Höhe $n = \frac{zu}{pz^2}$ eines unendlichkleinen Schraubenbogens, als eine schiefe Fläche betrachtet, zu bestimmen ist. Dadurch, durch die schnellere Bewegung, wird das Wasser nicht nur in dem untern Schraubenbogen EI, sondern auch in dem obern KO gemindert: indem das Wasser in dem obern nicht höher als in dem untern stehen kann. Diese durch schnellere Umdrehung verursachte Verminderung des Wassers bestätigen die in Hennerts Preisschrift angeführten vortrefflichen Versuche mit den großen holländischen Watermohlen: und ich habe ebenfalls bey kleinern Wasserschrauben vielmal beobachtet, daß bey schnellerer Umdrehung weniger Wasser steiget; und endlich, bey zu schneller, gar keines.

894. Suchen wir aber den unendlichkleinen Bogen, dessen Höhe, als eine schiefe Ebene betrachtet, n ist; das ist, den Ort des Schraubenganges, wo er mit dem Horizonte einen Winkel machet, dessen Sinus n ist.

Ich setze demnach, dieser unendlich kleine Bogen des Schraubenganges sey dw, und seine Höhe, da er als eine schiefe Ebene betrachtet wird, du. Mithin ist dw : du = 1 : n.

Nun ist (875) $du = \frac{Sc}{s}dx - Cdy = \frac{Sc}{s}dx - \frac{Cdx}{r}\sqrt{(2ry - y^2)}$; und $dw = \frac{dx}{s}$; (874); folglich

$$\frac{dx}{s} : \frac{Scdx}{s} - \frac{Cdx}{r}\sqrt{(2ry - y^2)} = 1 : n; \text{ und}$$

$\frac{1}{s}$

$\frac{1}{s} : \frac{Sc}{s} = \frac{C}{r}\sqrt{(2ry - y^2)} = 1 : n$; mithin

$\frac{n}{s} = \frac{Sc}{s} - \frac{C}{r}\sqrt{(2ry - y^2)}$; und

$\frac{C}{r}\sqrt{(2ry - y^2)} = \frac{Sc}{s} - \frac{n}{s}$;

$2ry - y^2 = \frac{rr}{C^2s^2}(Sc - n)^2$;

$y^2 - 2ry + + r^2 = r^2 - \frac{r^2}{C^2s^2}(Sc - n)^2$; endlich

$y = r \pm \sqrt{(r^2 - \frac{r^2}{C^2s^2}(Sc - n)^2)}$; oder

$y = r \pm r\sqrt{(1 - \frac{1}{C^2s^2}(Sc - n)^2)}$.

Es sind also zwey Punkte, z. B. M und I welche dieselbe Neigung gegen den Horizont haben, deren Sinus n ist; davon einer M die zugehörige Abscisse AN

$= r + r\sqrt{(1 - \frac{1}{C^2s^2}(Sc - n)^2)}$; und der andere I

die Abscisse $AK = r - r\sqrt{(1 - \frac{1}{C^2s^2}(Sc - n)^2)}$

hat.

Setzet man hier $n = o$: so entsteht $y = r \pm r\sqrt{(1 - \frac{s^2c^2}{C^2s^2})}$, wie oben (875); wie es seyn muß; eine Probe der Richtigkeit.

895. Setzet man $n = Sc$: so wird $y = r \pm r$; und Se ist der Sinus der Neigung des Schraubenganges in E und A oder G.

896. Soll aber $y = r$; oder $x = \frac{1}{C^2 s^2}(Sc-n)^2$ seyn; das ist, will man die Neigung des Schraubenganges in der Mitte F haben: so ist $Cs = Sc - n$, der Sinus derselben $n = Sc - Cs$: welches mit 878 und 879 übereinstimmet.

897. Nun sollte noch die Bestimmung der Wasserschraube geschehen, damit sie die größte Wirkung mache. Denn daß in ihrer Wirkung ein Maximum stecke, erhellet aus der Erfahrung: da bey schnellerer Umdrehung immer weniger Wasser steiget; und endlich gar keines: so muß wohl eine Geschwindigkeit seyn, welche mit der gegebenen Menge Wasser multiplicirt, das größte Produkt giebt. Herr Pr. Hennert, der über die Abhandlung der Wasserschraube, im Jahr 1767, von der Berlinerakademie den Preis erhalten, hat diese Bestimmung noch nicht gemacht; sondern dafür eine angegeben, welche so beschaffen, daß dabey der Wasserschraube Wirkung $= -o$ ist. Und Herr Hofrath Karsten machet über diese Abhandlung viele Erinnerungen, in seiner Mathematik. Wir lassen es also hierbey bewenden. Und da wir von Druck- und Saugwerken schon das Nöthige oben gesagt: so schließen wir unsere Mechanik mit folgenden Tabellen, davon die ersten aus des Herrn Oberleutenants Vega sehr correcten, nutzbarn Logarithmischen trigonometrischen ꝛc. Tafeln gezogen, und die letzte vom hiesigen Schülern gerechnet worden.

I. Ta-

# I. Tafel.

## Vergleichung der Schuhmaße verschiedener Oerter mit dem königlichen Pariserschuhe.

| Oerter. | Linen. |
|---|---|
| Aachen | 128,5 |
| Amsterdam | 125,5 |
| Anspach | 132,0 |
| Antiochia | 189,2 |
| Antwerpen | 126,6 |
| Augsburg | 131,3 |
| Avignon | 110,0 |
| Babylon, halbe Cub. Sac | 163,3 |
| Basel | 132,2 |
| Bayern | 98,6 |
| Berlin | 137,3 |
| Bern | 130,0 |
| Besanzon | 137,1 |
| Bologna Schritt | 841,0 |
| — — Schuh | 168,2 |
| Braunschweig | 126,5 |
| Bremen Schuh | 128,2 |
| Brescia, Braccio | 207,5 |
| Breslau Schuh | 126,0 |
| Briel | 148,6 |
| Brük | 122,6 |
| Brüssel | 129,0 |
| Cagliari Palmo | 89,8 |
| Cairo Deral | 245,9 |
| Calenberg Schuh | 129,5 |
| Carrara Palmo | 108,1 |

| Oerter. | Linen. |
|---|---|
| Castilien Schuh | 125,3 |
| Castilien Palmos | 94,0 |
| China | 147,7 |
| Cleve | 131,0 |
| Cöln | 122,0 |
| Constantinopel | 314,0 |
| Copenhagen | 139,13 |
| Cracau | 158,0 |
| Dänenmark | 139,13 |
| Danzig | 127,2 |
| Dordrecht | 159,6 |
| Dresden | 125,5 |
| Egypten Derah | 245,9 |
| Emden Schuh | 131,3 |
| England | 135,0 |
| Eyderstädt | 131,3 |
| Florenz Braccio da Terra | 243,0 |
| Frankfurt am Mayn | 127,0 |
| Frankreich Königl. Par. Schuh | 144,0 |
| Genf | 216,3 |
| Genua Palmo | 111,3 |
| Geometr. Schrit | 821,82 |
| Gibraltar | 125,3 |
| Gießen | 132,0 |
| Grenoble | 151,2 |
| Griechische | 135,88 |
| Gröningen | 129,5 |
| Haag in Holland | 144,0 |
| Halle | 132,0 |
| Hamburg | 127,0 |
| Hannover | 129,5. |

| Oerter. | Linen. |
|---|---|
| Harlem | 126,7 |
| Hebräischer alter Schuh | 159,0 |
| Herforder | 131,0 |
| Heydelberg | 123,5 |
| Hildesheim | 124,2 |
| Hollstein | 132,3 |
| Königsberg | 136,4 |
| Lachter von 8 Spannen dänische | 891,7 |
| — — zu Eisleben | 891,5 |
| — — zu Freyberg | 879,2 |
| — — zu Joachimsthal | 866,9 |
| — — zu Clausthal | 852,8 |
| Leiden Schuh | 139,0 |
| Leipzig gemeine | 125,1 |
| — — Bauschuh | 125,3 |
| Lion Schuh | 151,5 |
| Lissabon | 150,1 |
| Löwen | 126,6 |
| London | 135,12 |
| Lothringen | 129,1 |
| Lübek | 129,0 |
| Lüttich | 127,5 |
| Mannheim | 128,6 |
| Mantua Braccio | 206,2 |
| Mastrich von 10 Zoll Schuh | 124,5 |
| Maynz | 133,5 |
| Mecheln | 123,9 |
| Meklenburg | 129,0 |
| Middelburg | 133,0 |
| Milano Braccio | 216,6 |
| — — Schuh | 176,0 |

| Oerter. | Linen. |
|---|---|
| Mümpelgard | 127,4 |
| München | 98,6 |
| Neapel Palm | 116,9 |
| Nürnberg Artillerie Schuh | 129,95 |
| Nürnberg | 134,7 |
| Oldenburg | 131,3 |
| Osnabrük | 123,8 |
| Padua | 157,0 |
| Palermo Palmo | 107,3 |
| Paris k. Schuh | 144,0 |
| Parma Braccio | 242,3 |
| Pavia | 208,0 |
| Piacenza Braccio | 242,3 |
| Pommern Schuh | 129,5 |
| Rezio Braccio | 234,85 |
| Rival Schuh | 118,7 |
| Rheinl. Schuh | 139,13 |
| Riga | 121,5 |
| Rimini Braccio | 241,0 |
| Rom Schuh | 130,6 |
| — alter Schuh | 132,0 |
| Rostok | 128,2 |
| Rotterdam | 138,5 |
| Rouen | 120,0 |
| Rußland Schuh | 238,6 |
| Samos | 153,4 |
| Sardinien Palmo di Sardegna | 111,2 |
| — — Cagliari | 89,8 |
| Savoyen | 120,0 |
| Schwed. Faden | 789,6 |
| — — Schuh | 131,6 |

| Oerter. | Linen. |
|---|---|
| Sedan | 123,0 |
| Siam, Ken | 426,0 |
| Spanien Schuh | 125,3 |
| — — Palmos | 94,0 |
| Stettin Schuh | 125,3 |
| Stokholm | 131,6 |
| Strasburg | 128,3 |
| Stuttgard | 126,8 |
| Toledo | 125,3 |
| Turin | 143,2 |
| Turin piede di Liprando | 227,7 |
| Ulm | 128,1 |
| Utrecht | 121,0 |
| Venedig | 154,0 |
| Verona | 154,0 |
| Wien Schuh | 140,13 |
| Wien Elle | 345,42 |
| Wittenberg | 148,5 |
| Zelle | 129,2 |
| Ziriczee | 137,6 |
| Zürich | 133,1 |

Das vollkommen genaue Verhältniß zwischen dem Wiener- und Pariserschuhe ist folgendes; der Wienerschuh verhält sich zum Pariserschuhe = 100000 : 102764, nämlich 100000 Par. = 102764 Wiener. 1 Wiener- oder Oesterreicherme- ßen enthält 1,9471 Wienerkubikschuhe.

# II. Tafel.

## Vergleichung des Handelsgewichts vieler Oerter, nach Asen holländischen Troysgewichts.

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| Aachen oder Aacken | 9728 |
| Aix | 8506 |
| Alicante | 11062 |
| — kleine Pf | 7371 |
| Altona | 10080 |
| Amberg | 12480 |
| Amsterdam | 10279 |
| Ancona | 6988 |
| Anspach | 10608 |
| Antwerpen | 9697 |
| Deutsches Apoth. Gewicht | 7457 |
| Archangel | 8512 |
| Arschott | 9697 |
| Augsburg | 10232 |
| — leichte Pf | 9837 |
| Aurich, Hausgewicht | 10336 |
| — Waggewicht | 11370 |
| Avignon | 8203 |
| Bamberg | 10103 |
| Barcellona | 6430 |
| Barletto peso gr | 17608 |
| Basel | 10202 |
| Bassano | 7105 |
| Batavia Catti | 12292 |
| Baußen | 9020 |
| Bayonne | 10202 |

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| Bayreuth | 10770 |
| Bergamo | 6603 |
| Bergen in Norweg | 10388 |
| Bergen op Zoom | 9900 |
| Berlin | 9748 |
| Bern | 10840 |
| Beyersdorf | 10608 |
| Bilbao | 10202 |
| — Eisengewicht | 9580 |
| Bologna | 7537 |
| Boßen | 10426 |
| Bordeaux | 10228 |
| Braunschweig | 9716 |
| Bremen | 10380 |
| Brescia | 6810 |
| Breslau | 8434 |
| Brügge | 9697 |
| Brüssel | 9697 |
| Budissin | 9020 |
| Cadix | 9580 |
| Cairo Minas | 12406 |
| — Rotulá | 8985 |
| Calais | 10610 |
| — leichte Pf | 8765 |
| Candia schwere Rot | 10957 |
| — leichte | 7115 |
| Canton Catti | 12496 |
| Capua | 5902 |
| Carthagena | 9569 |
| Cassel | 6589 |
| Castilien | 9580 |

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| China Catti | 12496 |
| Chur | 10824 |
| Civita vecchia | 10080 |
| Coburg | 10608 |
| Cöln | 9728 |
| Como | 6456 |
| Constanz | 9822 |
| Constantinopel | |
| — Ok | 26396 |
| — Rot | 11614 |
| Corfu | 8500 |
| Corsica | 7166 |
| Costnitz | 9822 |
| Cracau | 8426 |
| Culmbach | 10770 |
| Cyprus Rot | 49492 |
| Dänemark | 10388 |
| Damasco Rot | 37333 |
| Danzig | 9062 |
| Delft | 10279 |
| Deventer | 9787 |
| Dieppe | 10286 |
| Dinkelspiel | 10200 |
| Dixmuyden | 8951 |
| Dordrecht | 10279 |
| Douvres | 9376 |
| Dresden | 9716 |
| Dublin | 9444 |
| Duynkirchen | 9081 |
| Edimburg | 10233 |
| Eger | 12839 |

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| Elbingen | 8842 |
| Emden | 10336 |
| England Troyspf. | 7770 |
| Avoir du pois | 9444 |
| Erfurt | 9822 |
| Erlang | 10608 |
| Falmouth | 9444 |
| Fano | 6934 |
| Ferrara | 7060 |
| Florenz | 7273 |
| Forli | 6854 |
| Frankfurth am Mayn Centnergewicht | 10595 |
| Pfundgewicht | 9720 |
| Frankfurt an der Oder | 9738 |
| Freyberg | 11166 |
| Geldern | 9714 |
| Genf große Pf. | 11477 |
| — — kleine | 9564 |
| Genua, Zollgewicht Rot. | 11320 |
| Cassagew. Rot. | 10291 |
| Cantaro Rot. | 10089 |
| — Schwer Schaalg | 7140 |
| — leicht | 6720 |
| Ghent | 9647 |
| Gibraltar | 9728 |
| Görlitz | 9020 |
| Gothenburg Viktualgewicht | 8848 |
| Eisengewicht | 7078 |
| Gröningen | 10182 |
| Guinea Rot | 9420 |
| Haag | 10279 |

Ham-

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| Hamburg Handelsgewicht..... | 10080 |
| — Cöln. Gewicht..... | 9728 |
| Hannover..... | 10129 |
| Harburg..... | 10150 |
| Harlem..... | 10279 |
| Havre de Grace..... | 10202 |
| Herzogenbusch..... | 9702 |
| Heydelberg..... | 10500 |
| Hildesheim..... | 9716 |
| Hof große Pf..... | 13260 |
| — kleine Pf..... | 11934 |
| — Kramergewicht..... | 10608 |
| Hull..... | 10080 |
| Japan Catti..... | 12372 |
| Java Catti..... | 12466 |
| Irrland Avoir d. p..... | 11333 |
| Kiel..... | 9916 |
| Kißingen..... | 10608 |
| Königsberg neu Berl. Gew..... | 9748 |
| — alt Gew..... | 7913 |
| Kopenhagen..... | 10388 |
| Krems..... | 11787 |
| Lacedämen Rot..... | 9408 |
| Laubav..... | 8719 |
| Leipzig Fleischgewicht..... | 10179 |
| — Handelsgew..... | 9716 |
| Leyden..... | 9697 |
| Libau..... | 8578 |
| Lindau..... | 19558 |
| Linz..... | 1787 |
| Lion Stadtgew..... | 8840 |

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| Lion Seidegew. | 9564 |
| Lissabon. | 9560 |
| Livorno. | 7131 |
| Lóbau. | 9716 |
| Lówen. | 9697 |
| Londen Avoir du pois. | 19444 |
| — Königsgew. | 14166 |
| — Troysgew. | 7770 |
| L'Drient. | 10202 |
| Lublin. | 8288 |
| Lucka Handelsgew. | 7746 |
| — Seidegewicht. | 16943 |
| Lucern. | 10391 |
| Lübek. | 10059 |
| Lüneburg. | 10125 |
| Lüttich. | 9765 |
| Madera. | 9066 |
| Madras. | 1480 |
| Madrit Bis. | 9580 |
| Magdeburg. | 9748 |
| Mahon. | 9255 |
| Majorca. | 8746 |
| Malaga. | 9580 |
| Malta Rot. | 17827 |
| Manheim. | 10299 |
| Mantua. | 6854 |
| Marseille. | 8359 |
| Mecka Medina Rot. | 9632 |
| Mecheln. | 9697 |
| Meißen. | 9822 |
| Memel. | 8594 |

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| Memmingen | 10655 |
| Messina von 12 Onc. | 6610 |
| Middelburg | 9738 |
| Milano peso sott. | 6822 |
| — peso grosso. | 15918 |
| Minorka | 9255 |
| Modena | 6702 |
| Mons | 9718 |
| Montpellier | 8470 |
| Moscau | 8512 |
| Münchberg | 10770 |
| München | 11671 |
| Münster | 9916 |
| Namur | 9799 |
| Nancy | 10202 |
| Nantes | 10202 |
| Neapoli | 6677 |
| Narva | 9738 |
| Naumburg | 9716 |
| Negroponte, Rot | 11138 |
| Neukastle | 10080 |
| Neuchatel | 10842 |
| Neuhof | 10608 |
| Neustadt an der Aisch | 10608 |
| Nimwegen | 10294 |
| Nizza | 6453 |
| Norwegen | 10388 |
| Nürnberg | 10610 |
| Ofen | 10228 |
| Oldenburg an der Hunte | 10279 |
| Oran Rot | 10483 |

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| Ostende | 9697 |
| Oudenarde | 9111 |
| Paderborn | 9916 |
| Padua | 6952 |
| Palermo | 6610 |
| Pariß Handelgewicht | 10202 |
| — Medic. Gewicht | 7648 |
| Parma | 7056 |
| Passau | 9996 |
| Pekin Catti | 12466 |
| Piacenza | 6714 |
| Piemont | 7750 |
| Pillau | 8311 |
| Pisa | 6779 |
| Posen | 8288 |
| Prag | 10690 |
| Presburg | 11616 |
| Ragusa | 7560 |
| Ravenna | 6233 |
| Regenspurg | 11671 |
| Reggio | 6866 |
| Rival | 8960 |
| Rhodus Rot | 49778 |
| Riga | 8701 |
| Rochelle | 10202 |
| Rom | 7345 |
| Rostok | 10634 |
| Rothenburg an der Tauber | 10608 |
| Rotterdam schwere Pf | 10279 |
| — leichte Pf | 9789 |

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| Rouen poids de marc. . . . . | 10202 |
| Rouen poids de Vicomte. . . . . | 10814 |
| Rußland. . . . . | 8512 |
| Ryssel schwer. . . . . | 9672 |
| — leicht. . . . . | 8949 |
| Salzburg. . . . . | 11652 |
| St. Petersburg. . . . . | 8512 |
| Sardinien. . . . . | 8343 |
| Schaafhausen. . . . . | 9564 |
| Schottland, Troy. . . . . | 7770 |
| — Avoir düp. . . . . | 9444 |
| Schweden Bikt. Gew. . . . . | 8848 |
| — Bergw. Gew. . . . . | 7822 |
| — Landstädtegew. . . . . | 7450 |
| — Eisengew. . . . . | 7078 |
| — Apoth. Gew. . . . . | 7416 |
| Schweinfurt. . . . . | 10608 |
| Sevilla. . . . . | 9580 |
| Sicilien. . . . . | 6610 |
| Siena. . . . . | 9309 |
| Smirna Ok. . . . . | 26182 |
| Spanien. . . . . | 9580 |
| Speyer. . . . . | 10608 |
| Stade. . . . . | 9886 |
| Stettin. . . . . | 9786 |
| Stokholm siehe Schweden. . . . . | |
| Stralsund. . . . . | 10059 |
| Strasburg schwer. . . . . | 10202 |
| — leicht. . . . . | 9812 |
| Thoren. . . . . | 8766 |

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| Toulon | 8930 |
| Toulouse | 8653 |
| Tournay | 9061 |
| Trieſt Wiener | 11672 |
| — Venez groſſi | 9955 |
| — — ſottili | 6300 |
| Turin | 7680 |
| Ulm | 9754 |
| Valentia groß | 11062 |
| — klein | 7371 |
| Valenciennes | 9787 |
| Venedig, peſo groſſo | 9955 |
| — peſo ſottili | 6300 |
| Verona peſo groſſ | 10350 |
| — peſo ſottili | 6924 |
| Vicenza ſchwer | 10143 |
| — leicht | 7074 |
| Vließingen | 9692 |
| Warſchau | 7863 |
| Wiburg | 8450 |
| Wien | 11672 |
| — Safransgewicht | 10608 |
| Windsheim | 10608 |
| Wismar | 10072 |
| Wittenberg | 9701 |
| Wonſiedel | 14759 |
| Würzburg | |
| — Kramergew | 9926 |
| Ypern | 8960 |
| Yvika | 9633 |

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| Zelle | 10105 |
| Zittau | 9735 |
| Zürich | 10998 |
| Zütphen | 9787 |
| Zwoll | 9787 |

Bey den Orten, wo keine Bemerkungen der Art des Gewichts geschehen, sind Pfunde zu verstehen.

1000 As = 7413 Engl. Grän
= 7723 Apothek. Grän
= 8947 Eschen
= 9033 fr. Grän
= 134736 Richtpfenth.

100000 Engl. Gr = 13489 As
Apothet. Gr. = 12947
Eschen = 11176
Fr. Gr. = 11070
Richtpfenth = 742

# III. Tafel.

## Vergleichung jeder Mark oder Pfund des Gold- Silber und Münzgewichts verschiedener Oerter, nach Asen holländischen Troysgewichts.

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| Amsterdam | 5120 |
| Antwerpen | 5120 |
| Augsburg | 4912 |
| Basel | 4864 |
| Berlin | 4874 |
| Braunschweig | 4858 |
| Bremen | 4864 |
| Breslau | 4066 |
| Brüssel | 5120 |
| Cadix sieh Spanien | |
| Cöln | 4864 |
| Cracau | 4138 |
| Dänemark | 4388 |
| Danzig | 3974 |
| England Troyspf | 7770 |
| Erfurt | 4864 |
| Florenz pf | 7060 |
| Frankfurt am Mayn | 4864 |
| Frankreich | 5101 |
| Genf wie Frankr | |
| Genua pf | 6612 |
| Hamburg | 4864 |
| Hannover | 4864 |

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| Holland | 5120 |
| Königsberg | 4076 |
| Koppenhagen | 4888 |
| Leipzig | 4864 |
| Lissabon | 4780 |
| Livorno Pf | 7060 |
| London Troispf | 7770 |
| Lübek | 4864 |
| Madrit sieh Spanien | |
| Magdeburg | 4874 |
| Mayland | 4891 |
| Neapolis Pf | 6677 |
| Nürnberg | 4961 |
| Paris | 5101 |
| Pisa sieh Florenz | |
| Polen | 4198 |
| Portugal | 4780 |
| Prag | 5280 |
| Regenspurg | 5111 |
| Riga | 4351 |
| Rom Pf | 7090 |
| Rußland Pf | 8512 |
| Schweden | 4384 |
| Sevilla sieh Spanien | |
| Siena Pf | 6982 |
| Spanien Silber | 4790 |
| Gold Castellanos | 95 |
| Stokholm | 4384 |
| Strasburg | 4906 |
| Turin | 5120 |

| Oerter. | Asen. |
|---|---|
| Venedig..... | 4970 |
| Venedig Pf... .. .. .. ..... | 7456 |
| Wien..... | 5845 |
| Wildau..... | 4053 |

**Anmerkung.** Wo bey den Oertern keine Art des Gewichts bemerkt worden, sind Marke zu verstehen.

# IV. Tafel.

## Vergleichung der eigenen Schwere der Körper.

| | |
|---|---|
| Amianthstein | 2,913 |
| Alabaster | 1,872 |
| Austerschaale | 2,092 |
| Alaun | 1,714 |
| Ahorn | 0,755 |
| Amber | 1,040 |
| Agat schwarzer | 1,238 |
| Ammoniaktinktur | 0,899 |
| Amberöl | 0,978 |
| Ambergeist | 1,031 |
| Bley englisches | 11,325 |
| — deutsches | 11,310 |
| — kalk | 8,940 |
| — Weiß | 3,156 |
| — Asche | 1,666 |
| — Zucker | 2,745 |
| Blaustein aus Namur | 5,000 |
| Blutstein | 4,360 |
| Braunstein | 3,530 |
| Bruchstein | 2,240 |
| Bolus armenischer | 2,727 |
| Bezoarstein abendländischer | 1,500 |
| — morgenländischer | 1,530 |
| Blasenstein menschlicher | 1,700 |
| Bergcrystall | 2,650 |
| Brunellensaltz | 2,148 |
| Borax | 1,720 |

| | |
|---|---|
| Brechweinstein | 2,246 |
| Brasilienholz rothes | 1,031 |
| Buchbaum | 0,854 |
| Buchbaumholz | 1,031 |
| Börnstein durchsichtiger | 1,065 |
| Brunnenwasser | 1,008 |
| Balsam von Tolu | 0,896 |
| Baumöl | 0,913 |
| Blutwasser | 1,190 |
| Burgunder Wein | 0,953 |
| Corallachat | 2,605 |
| Crystall isländisches | 2,720 |
| Corallen rothe | 2,689 |
| — weiße | 2,500 |
| Campeschenholz | 0,913 |
| Cedernholz | 0,613 |
| Chinawurzel | 1,071 |
| Canariensekt | 1,033 |
| Dillenöl | 0,994 |
| Dostenöl | 0,940 |
| Eisen gegossenes | 7,434 |
| Eisen geschmiedetes | 7,645 |
| Eisenblüte, 1mal sublimirte | 1,453 |
| — 3mal sublimirte | 1,269 |
| Edelgestein | 3,400 |
| Ebenbaum | 1,177 |
| Eschenbaum vom Zweige | 0,734 |
| — vom Stamme | 0,845 |
| Eiche vom Stamme | 0,929 |
| — vom grünen Aste | 0,870 |
| Eibenbaum | 0,760 |
| Enzianwurzel | 0,800 |

| | |
|---|---|
| Essig distillirter | 1,030 |
| Erde türkische | 2,000 |
| Fraueneis | 2,322 |
| Franzosenholzsalz | 2,148 |
| Franzosenholz | 1,333 |
| Franzosenholzrinde | 1,250 |
| Franzosenholzharz | 1,224 |
| Fließwasser | 1,009 |
| Feldkümmelöl | 0,940 |
| Fenchelöl | 0,997 |
| Gold das reinste | 19,640 |
| — guinesisches | 18,888 |
| — französisches | 18,166 |
| — Ducaten | 18,261 |
| — Glätte | 6,000 |
| — Scheidwasser | 1,234 |
| Grünspan | 1,714 |
| Glas vom Spiesglase | 5,280 |
| Granat böhmischer | 4,360 |
| — schwedischer | 3,978 |
| — Erz | 3,100 |
| Grammatiasstein | 2,515 |
| Griesstein | 2,894 |
| Galmeystein | 5,000 |
| Glas, feinstes | 3,150 |
| — gemeingrünes | 2,620 |
| — zu den Flaschen | 2,666 |
| Grisholz | 1,200 |
| Galläpfel | 1,034 |
| Gummi arabischer | 1,375 |
| — traganth | 1,333 |
| Hyacinth | 2,631 |

Hirsch-

| | |
|---|---|
| Hirschhornsalz flüchtiges | 1,496 |
| Hirschhorn | 1,875 |
| Helfenbein | 1,825 |
| Hausenblase | 1,111 |
| Hirschhorngeist | 1,073 |
| Honiggeist | 0,895 |
| Holz buntschäkicht aus Virginien (Variegatum Virginiae) | 1,313 |
| Jaspis | 2,666 |
| Judenstein | 2,500 |
| Isopenöl | 0,986 |
| Kupfer japanisches | 9,000 |
| — schwedisches | 8,784 |
| — gebranntes | 5,453 |
| Karniol | 3,290 |
| Kieselstein durchsichtiger | 2,641 |
| — gemeiner | 2,542 |
| Krebsaugen ächte | 1,890 |
| — unächte | 2,480 |
| Kukusnuß | 1,340 |
| Kochsalz | 2,148 |
| Kampfer | 0,996 |
| Kuhmilch | 1,030 |
| Krahmkümmel | 0,975 |
| Krausmünzöl | 0,975 |
| Lasurstein | 3,054 |
| Lebensbaum | 1,327 |
| Luft mittlere atmosphärische in Wien | 0,001 $\frac{9}{9}$ 1 |
| Leinöl | 0,932 |
| Messing gegossenes | 8,000 |
| — geschlagenes | 8,349 |

| | |
|---|---|
| Metallsafran | 4,500 |
| Markasit | 4,589 |
| Marmel ital. schwarz | 2,704 |
| — italiän. weisser | 2,707 |
| — anderer | 2,718 |
| Mastixholz | 0,849 |
| Mohnsaft türkischer | 1,363 |
| Muscatennusöl | 0,948 |
| Menschenblut | 1,040 |
| Meersalzgeist | 1,130 |
| Nelkenöl | 1,034 |
| Onichel | 2,510 |
| Ochsenhorn | 1,840 |
| Ochsenknochen ausgetroknete | 1,656 |
| Paradiesholz | 1,177 |
| Pflaumenbaum | 0,663 |
| Pantoffelholz | 0,240 |
| Pech | 1,150 |
| Pomeranzenöl | 0,888 |
| Poleyöl | 0,978 |
| Pontak, rother Wein | 0,993 |
| Queckfilber deutsches | 14,000 |
| — englisches | 13,593 |
| — nach Boerhaven einmal distilirtes | 13,570 |
| — mit dem feinsten Gold versetzt u. 100maldistillirt | 13,550 |
| Queckfilber mit dem feinsten Silber versetzt, u. 100mal distillirt | 13,580 |
| — mit Bley versetzt, zu Pulver und wieder lebendig gemacht | 13,550 |
| — 511mal distillirtes | 14,110 |

| | |
|---|---|
| Queckſilber ſublimirt ätzendes.. .... | 8,000 |
| — ſüßes 2mal ſublimirt.. .. ..... | 12,353 |
| — 3mal ſublimirtes.. .. .. .. .. | 9,882 |
| — 4mal ſublimirtes.. .. .. .. .. | 8,235 |
| Rothſtein aus Bremen .. .. .. .. | 1,666 |
| Rhinoceroshorn.... .. .. .... .. | 1,242 |
| Roſenholz..... .... .. ... | 1,125 |
| Regenwaſſer..... | 1, |
| Rubenſaamöl.... .. .. .. ..... | 0,853 |
| Rosmarienöl.... .... .. .. .... | 0,934 |
| Reinfarenkrautöl..... .... .. | 0,946 |
| Rinde peruvianiſche..... .... | 0,784 |
| Silberglätte.. .. .. .. .. ..... | 6,044 |
| Silber feines.. ..... ..... | 11,091 |
| — holländiſch vom beſten..... | 10,535 |
| — von geringen Werthe..... | 10,340 |
| Stahl weicher..... .... | 7,738 |
| — harter.... .... .. .... | 7,704 |
| — der härteſte.. ..... | 7,809 |
| Stahlſalz.. .. .. .... .. ..... | 1,830 |
| Spiesglas rohes.. .. .... .. .... | 4,000 |
| — ungariſches..... | 4,700 |
| — König mit Eiſen.. .. .. .... | 7,500 |
| — König mit Kupfer.. .. .. .... | 7,500 |
| — Zinnober.. .. .. ..... | 6,044 |
| Sardachat.... .. ..... .... | 3,598 |
| Seekuhſtein jamaiſcher.. .. ..... | 2,270 |
| — anderer.. .. .. ..... .. | 2,330 |
| Schieferſtein blauer.. .... .... | 3,500 |
| Salz polichreſtiſches .. .. .. .. | 2,148 |
| Slate irrländiſche..... | 2,490 |
| Stein Callipot genannt .. .. .. .. | 1,928 |

Stein-

| | |
|---|---|
| Steinkohle | 1,240 |
| Schwefel lebendiger | 2,000 |
| — gemeiner | 1,800 |
| Steinsalz | 2,143 |
| Salpeter | 1,900 |
| — feuerbeständiger | 2,745 |
| Salmiak reiner | 1,453 |
| Schaafsknochen frische | 2,222 |
| Sandelholz weißes | 1,041 |
| — gelbes | 0,809 |
| — rothes | 1,128 |
| Sassefras | 0,482 |
| Scammonienharz | 1,200 |
| Seewasser | 1,030 |
| Scheidewasser gemeines | 1,300 |
| Spiesglasöl | 2,470 |
| Spiesglastinktur | 0,866 |
| Sassefrasöl | 1,094 |
| Sadebaumöl | 0,986 |
| Spiköl | 0,936 |
| Salpetergeist gemeiner | 1,315 |
| — hermetischer | 1,610 |
| — mit Vitriol | 1,338 |
| — süsser | 1,000 |
| Salpetergeist bezoardischer | 1,315 |
| Seidengeist | 1,145 |
| Salzgeist süßer | 0,951 |
| — mit Vitriolöl | 1,154 |
| Salmiakgeist mit Kalk | 0,952 |
| Turbith mineralischer | 8,235 |
| Tutie | 4,615 |
| Türkis | 2,508 |

| | |
|---|---|
| Talk venetianischer | 2,780 |
| — jamaischer | 3,000 |
| — Tannenholz | 0,550 |
| Tinktur von peruvian Rinde | 0,900 |
| Terpentinöl | 0,792 |
| Terpentingeist | 0,874 |
| Ulmenbaum | 0,600 |
| Vitriol englischer | 1,880 |
| — danziger | 1,715 |
| — weißer | 1,900 |
| — rothgebrannter | 1,900 |
| Vitriolsalz | 1,900 |
| Vitriolweinstein | 2,298 |
| Vitriolöl | 1,700 |
| Vitriolgeist | 1,203 |
| Wasser reines aus Flüssen | 1,008 1/2 7/0 |
| Wasser (Regen) | 1, |
| Wasser 3mal distillirtes | 0,991 1/6 |
| Wundersalz Glaubers | 2,246 |
| Wismuth | 9,700 |
| Wetzstein lothringischer | 3,288 |
| Weinstein | 1,849 |
| Weinsteinschaum | 1,900 |
| Wacholderbaum | 0,556 |
| Wachs gelbes | 0,955 |
| Weihrauch | 1,071 |
| Weinessig | 1,011 |
| Wachsöl | 0,831 |
| Wacholderöl | 0,911 |
| Weinsteinöl an der Luft geschmolzenes | 1,550 |
| Weinsteingeist | 1,073 |

| | |
|---|---|
| Weingeist rektificirter | 0,866 |
| Zinober gegrabener | 7,300 |
| — gemachter | 8,200 |
| Zinn reines | 7,320 |
| — englisches | 7,471 |
| Ziegenmilch | 1,009 |
| Zimmetöl | 1,035 |

In dieser Tafel ist die Schwere des Regenwassers zum Grunde gelegt und = 1 gesetzt worden

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 Wienerkubikschuh | Regenwasser wiegt. | $56\frac{1}{2}$ | W. Pf. |
| 1 Wienerkubikzoll | | 0,0327 | |
| 1 Wienermaaß | | 2,5312 | |
| 1 Wienereym. 40 M. | | 101,248 | |

1 Wienereymer enthält { 1,792 Wienerkubikschuh / 3096,576 Wienerkubikzoll

1 Wienermaaß enthält 77,4144 Wienerkubikzolle
1 Wienerkubikschuh enthält 22,3214 Wienermaaß

Das Gewicht eines Wienerkubikschuhes von was immer für einem in dieser Tafel befindlichen Körper wird in Wienerpfunden gefunden, wenn man die daneben stehende Zahl mit $56\frac{1}{2}$ multiplicirt. Z. B. 1 Wienerkubikschuh vom reinsten Golde wiegt $19{,}640 \times 56\frac{1}{2} =$ 1109,66 Wienerpfunde, und ein Wienerkubikschuh atmosphärischer Luft bey mittlerer Temperatur in Wien wiegt $0{,}001\frac{9}{1} \times 56\frac{1}{2} = 0{,}062$ Wienerpfunde = 1 Loth 3 Quintel 56 Gran, und endlich 1 Wienerkubikschuh des gewöhnlichen reinen Flußwassers wiegt 57 Wienerpfunde.

## V. Tafel.

**Muschenbroeks Versuche über das Zerreißen einiger Arten Holzes, welche länglichte viereckige Stäbe waren, deren Dicke zur Quadratseite 0,27 rheinländischer Zolle hatten, und von folgenden Gewichtern zerrissen wurden.**

---

| | | | |
|---|---|---|---|
| Das | Buchenholz | von | 1250 Pfund. |
| — | Eschenholz | — | 1250 — |
| — | Eichenholz | — | 1150 — |
| — | Lindenholz | — | 1000 — |
| — | Erlenholz | — | 1000 — |
| — | Ulmenholz | — | 950 — |
| — | Tannenholz | — | 600 — |
| — | Fichtenholz | — | 550 — |

## VI. Tafel.

**Muschenbroeks Versuche über das Zerreißen der Metalle welche Zylindrische Fäden waren, deren Durchmesser, 0,1 rheinländischer Zolle betrug, und von folgenden Gewichtern zerrissen wurden.**

---

| | | | |
|---|---|---|---|
| Das | Gold | von | 500 Pfund. |
| — | Eisen | — | 457 — |
| — | Silber | — | 370 — |
| — | Messing | — | 360 — |
| Rothes | Kupfer | — | 299,25 — |
| Das | Zinn | — | 49,25 — |
| — | Bley | — | 29,25 — |

## VII. Tafel.

**Muschenbroeks Versuche über das Brechen einiger Holzarten, welche länglichte Viereckige Stäbe waren, deren Quadratseite 0,27 rheinländische Zolle betrug, und sich etwas bogen ehe sie brachen.**

| Die Entfernung des Gewichtes vom Zapfenlager ehe der Versuch angestellet war. | Die Entfernung des Gewichtes vom Zapfenlager, indem der Bruch geschah. | Das brechende Gewicht, welches an dem einen Ende hieng. |
|---|---|---|
| Zoll. | Zoll. | Unzen |
| Bey Fichtenholz 10 | 9 | 40 |
| — Eichenholz 10 | 8,5 | 48 |
| — Ulmenholz 11 | 9 | 44 |
| — Tannenholz 11 | 9,5 | 36,5 |
| — Erlenholz 10 | 9,25 | 48, |
| — Buchenholz 10 | 7 | 56,5 |

**Anmerkung zu diesen drey letzten Tafeln** daß die Stärke der Körper von einerley Art: womit sie den zerreißenden Kräften wiederstehn, sich wie ihre Dicke verhalten, ist eine Wahrheit die ganz leicht einzusehen. Bey dem Brechen aber ist nicht nur auf die Dicke, sondern auch auf die Länge acht zu haben; so daß die brechenden Kräfte bey viereckichen Stäben von einerley Art sich wie umgekehrt ihre Länge und gerad wie ihre Breite multiplicirt mit dem Quadrat der Höhe, verhalten müssen, wie die gemeine Theorie giebt, die nicht schwer einzusehen. Allein diese Materie wird nach hoher Verordnung anderwärts abgehandelt.

# VIII. Tafel.

## Von der dem Abfalle zugehörigen Geschwindigkeit.

| Abfall in S. u. Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. | Abfall in S. u. Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 $\frac{1}{4}$ | 1,121 | 0,465 | 0 $6\frac{3}{4}$ | 5,828 | 0,107 |
| 0 $\frac{1}{2}$ | 1,586 | 0,356 | 0 7 | 5,935 | 0,105 |
| 0 $\frac{3}{4}$ | 1,942 | 0,301 | 0 $7\frac{1}{4}$ | 6,040 | 0,104 |
| 0 1 | 2,243 | 0,265 | 0 $7\frac{1}{2}$ | 6,144 | 0,101 |
| 0 $1\frac{1}{4}$ | 2,508 | 0,239 | 0 $7\frac{3}{4}$ | 6,245 | 0,100 |
| 0 $1\frac{1}{2}$ | 2,747 | 0,220 | 0 8 | 6,345 | 0,098 |
| 0 $1\frac{3}{4}$ | 2,967 | 0,205 | 0 $8\frac{1}{4}$ | 6,443 | 0,097 |
| 0 2 | 3,172 | 0,193 | 0 $8\frac{1}{2}$ | 6 540 | 0,096 |
| 0 $2\frac{1}{4}$ | 3,365 | 0,182 | 0 $8\frac{3}{4}$ | 6,636 | 0,094 |
| 0 $2\frac{1}{2}$ | 3,547 | 0,173 | 0 9 | 6,730 | 0,093 |
| 0 $2\frac{3}{4}$ | 3,720 | 0,165 | 0 $9\frac{1}{4}$ | 6,823 | 0,091 |
| 0 3 | 3,885 | 0,159 | 0 $9\frac{1}{2}$ | 6,914 | 0,091 |
| 0 $3\frac{1}{4}$ | 4,044 | 0,153 | 0 $9\frac{3}{4}$ | 7,005 | 0,089 |
| 0 $3\frac{1}{2}$ | 4,197 | 0,147 | 0 10 | 7,094 | 0,088 |
| 0 $3\frac{3}{4}$ | 4,344 | 0,143 | 0 $10\frac{1}{4}$ | 7,182 | 0,087 |
| 0 4 | 4,487 | 0,138 | 0 $10\frac{1}{2}$ | 7,269 | 0,086 |
| 0 $4\frac{1}{4}$ | 4,625 | 0,134 | 0 $10\frac{3}{4}$ | 7,355 | 0,085 |
| 0 $4\frac{1}{2}$ | 4,759 | 0,130 | 0 11 | 7,440 | 0,084 |
| 0 $4\frac{3}{4}$ | 4,889 | 0,127 | 0 $11\frac{1}{4}$ | 7,524 | 0,084 |
| 0 5 | 5,016 | 0,124 | 0 $11\frac{1}{2}$ | 7,608 | 0,082 |
| 0 $5\frac{1}{4}$ | 5,140 | 0,121 | 0 $11\frac{3}{4}$ | 7,690 | 0,081 |
| 0 $5\frac{1}{2}$ | 5,261 | 0,118 | 1 0 | 7,771 | 0,081 |
| 0 $5\frac{3}{4}$ | 5,379 | 0,116 | 1 $\frac{1}{4}$ | 7,852 | 0,079 |
| 0 6 | 5,495 | 0,113 | 1 $\frac{1}{2}$ | 7,931 | 0,079 |
| 0 $6\frac{1}{4}$ | 5,608 | 0,111 | 1 $\frac{3}{4}$ | 8,010 | 0,078 |
| 0 $6\frac{1}{2}$ | 5,719 | 0,109 | 1 1 | 8,088 | 0,078 |

| Abfall in S.u. Zoll | | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. | Abfall in S.u. Zoll | | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 1/4 | 8,166 | 0,077 | 1 | 9 | 10,281 | 0,061 |
| 1 | 1 1/2 | 8,243 | 0,076 | 1 | 9 1/4 | 10,342 | 0,060 |
| 1 | 1 3/4 | 8,319 | 0,075 | 1 | 9 1/2 | 10,402 | 0,061 |
| 1 | 2 | 8,394 | 0,075 | 1 | 9 3/4 | 10,463 | 0,059 |
| 1 | 2 1/4 | 8,469 | 0,074 | 1 | 10 | 10,522 | 0,060 |
| 1 | 2 1/2 | 8,543 | 0,073 | 1 | 10 1/4 | 10,582 | 0,059 |
| 1 | 2 3/4 | 8,616 | 0,073 | 1 | 10 1/2 | 10,641 | 0,059 |
| 1 | 3 | 8,689 | 0,072 | 1 | 10 3/4 | 10,700 | 0,059 |
| 1 | 3 1/4 | 8,761 | 0,071 | 1 | 11 | 10,759 | 0,058 |
| 1 | 3 1/2 | 8,832 | 0,071 | 1 | 11 1/4 | 10,817 | 0,058 |
| 1 | 3 3/4 | 8,903 | 0,071 | 1 | 11 1/2 | 10,875 | 0,058 |
| 1 | 4 | 8,974 | 0,069 | 1 | 11 3/4 | 10,933 | 0,057 |
| 1 | 4 1/4 | 9,043 | 0,070 | 2 | 0 | 10,990 | 0,058 |
| 1 | 4 1/2 | 9,113 | 0,068 | 2 | 1/4 | 11,048 | 0,056 |
| 1 | 4 3/4 | 9,181 | 0,069 | 2 | 1/2 | 11,104 | 0,057 |
| 1 | 5 | 9,250 | 0,067 | 2 | 3/4 | 11,161 | 0,056 |
| 1 | 5 1/4 | 9,317 | 0,068 | 2 | 1 | 11,217 | 0,056 |
| 1 | 5 1/2 | 9,385 | 0,067 | 2 | 1 1/4 | 11,273 | 0,056 |
| 1 | 5 3/4 | 9,452 | 0,066 | 2 | 1 1/2 | 11,329 | 0,055 |
| 1 | 6 | 9,518 | 0,066 | 2 | 1 3/4 | 11,384 | 0,055 |
| 1 | 6 1/4 | 9,584 | 0,065 | 2 | 2 | 11,439 | 0,055 |
| 1 | 6 1/2 | 9,649 | 0,065 | 2 | 2 1/4 | 11,494 | 0,055 |
| 1 | 6 3/4 | 9,714 | 0,065 | 2 | 2 1/2 | 11,549 | 0,054 |
| 1 | 7 | 9,779 | 0,064 | 2 | 2 3/4 | 11,603 | 0,054 |
| 1 | 7 1/4 | 9,843 | 0,064 | 2 | 3 | 11.657 | 0,054 |
| 1 | 7 1/2 | 9,907 | 0,063 | 2 | 3 1/4 | 11,711 | 0,054 |
| 1 | 7 3/4 | 9,970 | 0,063 | 2 | 3 1/2 | 11,765 | 0,053 |
| 1 | 8 | 10,033 | 0,062 | 2 | 3 3/4 | 11,818 | 0,053 |
| 1 | 8 1/4 | 10,095 | 0,063 | 2 | 4 | 11,871 | 0,053 |
| 1 | 8 1/2 | 10,158 | 0,061 | 2 | 4 1/4 | 11,924 | 0,053 |
| 1 | 8 3/4 | 10,219 | 0,062 | 2 | 4 1/2 | 11,977 | 0,052 |

| Abfall in S.u.Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. | Abfall in S.u.Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 4¾ | 12,029 | 0,052 | 3 ½ | 13,554 | 0,046 |
| 2 5 | 12,081 | 0,052 | 3 ¾ | 13,600 | 0,046 |
| 2 5¼ | 12,133 | 0,052 | 3 1 | 13,646 | 0,046 |
| 2 5½ | 12,185 | 0,051 | 3 1¼ | 13,692 | 0,046 |
| 2 5¾ | 12,236 | 0,052 | 3 1½ | 13,738 | 0,046 |
| 2 6 | 12,288 | 0,051 | 3 1¾ | 13,784 | 0,045 |
| 2 6¼ | 12,339 | 0,051 | 3 2 | 13,829 | 0,046 |
| 2 6½ | 12,390 | 0,050 | 3 2¼ | 13,875 | 0,045 |
| 2 6¾ | 12,440 | 0,051 | 3 2½ | 13,920 | 0,045 |
| 2 7 | 12,491 | 0,050 | 3 2¾ | 13,965 | 0,045 |
| 2 7¼ | 12,541 | 0,050 | 3 3 | 14,010 | 0,045 |
| 2 7½ | 12,591 | 0,050 | 3 3¼ | 14,055 | 0,045 |
| 2 7¾ | 12,641 | 0,050 | 3 3½ | 14,100 | 0,044 |
| 2 8 | 12,691 | 0,049 | 3 3¾ | 14,144 | 0,045 |
| 2 8¼ | 12,740 | 0,049 | 3 4 | 14,189 | 0,044 |
| 2 8½ | 12,789 | 0,050 | 3 4¼ | 14,233 | 0,044 |
| 2 8¾ | 12,839 | 0,048 | 3 4½ | 14,277 | 0,044 |
| 2 9 | 12,887 | 0,049 | 3 4¾ | 14,321 | 0,044 |
| 2 9¼ | 12,936 | 0,049 | 3 5 | 14,356 | 0,044 |
| 2 9½ | 12,985 | 0,048 | 3 5¼ | 14,409 | 0,043 |
| 2 9¾ | 13,033 | 0,048 | 3 5½ | 14,452 | 0,044 |
| 2 10 | 13,081 | 0,048 | 3 5¾ | 14,496 | 0,043 |
| 2 10¼ | 13,129 | 0,048 | 3 6 | 14,539 | 0,043 |
| 2 10½ | 13,177 | 0,048 | 3 6¼ | 14,582 | 0,043 |
| 2 10¾ | 13,225 | 0,047 | 3 6½ | 14,625 | 0,043 |
| 2 11 | 13,272 | 0,048 | 3 6¾ | 14,668 | 0,043 |
| 2 11¼ | 13,320 | 0,047 | 3 7 | 14,711 | 0,043 |
| 2 11½ | 13,367 | 0,047 | 3 7¼ | 14,754 | 0,042 |
| 2 11¾ | 13,414 | 0,047 | 3 7½ | 14,796 | 0,043 |
| 3 0 | 13,461 | 0,046 | 3 7¾ | 14,839 | 0,042 |
| 3 ¼ | 13,507 | 0,047 | 3 8 | 14,881 | 0,042 |

| Abfall in S. u. Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. | Abfall in S. u. Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 8¼ | 14,923 | 0,043 | 4 4 | 16,178 | 0,039 |
| 3 8½ | 14,966 | 0,042 | 4 4¼ | 16,217 | 0,038 |
| 3 8¾ | 15,008 | 0,041 | 4 4½ | 16,255 | 0,039 |
| 3 9 | 15,049 | 0,042 | 4 4¾ | 16,294 | 0,038 |
| 3 9¼ | 15,091 | 0,042 | 4 5 | 16,332 | 0,039 |
| 3 9½ | 15,133 | 0,041 | 4 5¼ | 16,371 | 0,038 |
| 3 9¾ | 15,174 | 0,042 | 4 5½ | 16,409 | 0,039 |
| 3 10 | 15,216 | 0,041 | 4 5¾ | 16,448 | 0,038 |
| 3 10¼ | 15,257 | 0,041 | 4 6 | 16,486 | 0,038 |
| 3 10½ | 15,298 | 0,040 | 4 6¼ | 16,524 | 0,038 |
| 3 10¾ | 15,338 | 0,042 | 4 6½ | 16,562 | 0,038 |
| 3 11 | 15,380 | 0,041 | 4 6¾ | 16,600 | 0,038 |
| 3 11¼ | 15,421 | 0,041 | 4 7 | 16,638 | 0,038 |
| 3 11½ | 15,462 | 0,040 | 4 7¼ | 16,676 | 0,037 |
| 3 11¾ | 15,502 | 0,041 | 4 7½ | 16,713 | 0,038 |
| 4 0 | 15,543 | 0,040 | 4 7¾ | 16,751 | 0,037 |
| 4 ¼ | 15,583 | 0,041 | 4 8 | 16,788 | 0,038 |
| 4 ½ | 15,624 | 0,040 | 4 8¼ | 16,826 | 0,037 |
| 4 ¾ | 15,664 | 0,040 | 4 8½ | 16,863 | 0,037 |
| 4 1 | 15,704 | 0,040 | 4 8¾ | 16,900 | 0,038 |
| 4 1¼ | 15,744 | 0,040 | 4 9 | 16,938 | 0,037 |
| 4 1½ | 15,784 | 0,040 | 4 9¼ | 16,975 | 0,037 |
| 4 1¾ | 15,824 | 0,040 | 4 9½ | 17,012 | 0,037 |
| 4 2 | 15,864 | 0,039 | 4 9¾ | 17,049 | 0,037 |
| 4 2¼ | 15,903 | 0,039 | 4 10 | 17,086 | 0,036 |
| 4 2½ | 15,942 | 0,040 | 4 10¼ | 17,122 | 0,037 |
| 4 2¾ | 15,982 | 0,039 | 4 10½ | 17,159 | 0,037 |
| 4 3 | 16,021 | 0,040 | 4 10¾ | 17,196 | 0,036 |
| 4 3¼ | 16,061 | 0,039 | 4 11 | 17,232 | 0,037 |
| 4 3½ | 16,100 | 0,039 | 4 11¼ | 17,269 | 0,036 |
| 4 4¾ | 16,139 | 0,039 | 4 11½ | 17,305 | 0,036 |

| Abfall in S.u.Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. | Abfall in S.u.Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 11 3/4 | 17,341 | 0,037 | 5 7 1/2 | 18,432 | 0,034 |
| 5 0 | 17,378 | 0,036 | 5 7 3/4 | 18,466 | 0,034 |
| 5 1/4 | 17,414 | 0,036 | 5 8 | 18,500 | 0,034 |
| 5 1/2 | 17,450 | 0,036 | 5 8 1/4 | 18,534 | 0,034 |
| 5 3/4 | 17,486 | 0,036 | 5 8 1/2 | 18,568 | 0,034 |
| 5 1 | 17,522 | 0,036 | 5 8 3/4 | 18,602 | 0,033 |
| 5 1 1/4 | 17,558 | 0,036 | 5 9 | 18,635 | 0,034 |
| 5 1 1/2 | 17,594 | 0,035 | 5 9 1/4 | 18,669 | 0,034 |
| 5 1 3/4 | 17,629 | 0,036 | 5 9 1/2 | 18,703 | 0,033 |
| 5 2 | 17,665 | 0,035 | 5 9 3/4 | 18,736 | 0,034 |
| 5 2 1/4 | 17,700 | 0,036 | 5 10 | 18,770 | 0,034 |
| 5 2 1/2 | 17,736 | 0,035 | 5 10 1/4 | 18,804 | 0,033 |
| 5 2 3/4 | 17,771 | 0,036 | 5 10 1/2 | 18,837 | 0,033 |
| 5 3 | 17,807 | 0,035 | 5 10 3/4 | 18,870 | 0,034 |
| 5 3 1/4 | 17,842 | 0,035 | 5 11 | 18,904 | 0,033 |
| 5 3 1/2 | 17,877 | 0,035 | 5 11 1/4 | 18,937 | 0,033 |
| 5 3 3/4 | 17,912 | 0,036 | 5 11 1/2 | 18,970 | 0,033 |
| 5 4 | 17,948 | 0,035 | 5 11 3/4 | 19,003 | 0,033 |
| 5 4 1/4 | 17,983 | 0,035 | 6 0 | 19,036 | 0,033 |
| 5 4 1/2 | 18,018 | 0,034 | 6 1/4 | 19,069 | 0,033 |
| 5 4 3/4 | 18,052 | 0,035 | 6 1/2 | 19,102 | 0,033 |
| 5 5 | 18,087 | 0,035 | 6 3/4 | 19,135 | 0,033 |
| 5 5 1/4 | 18,122 | 0,035 | 6 1 | 19,168 | 0,033 |
| 5 5 1/2 | 18,157 | 0,034 | 6 1 1/4 | 19,201 | 0,032 |
| 5 5 3/4 | 18,191 | 0,035 | 6 1 1/2 | 19,233 | 0,033 |
| 5 6 | 18,226 | 0,034 | 6 1 3/4 | 19,266 | 0,033 |
| 5 6 1/4 | 18,260 | 0,035 | 6 2 | 19,299 | 0,032 |
| 5 6 1/2 | 18,295 | 0,034 | 6 2 1/4 | 19,331 | 0,033 |
| 5 6 3/4 | 18,329 | 0,034 | 6 2 1/2 | 19,364 | 0,032 |
| 5 7 | 18,363 | 0,035 | 6 2 3/4 | 19,396 | 0,033 |
| 5 7 1/4 | 18,398 | 0,034 | 6 3 | 19,429 | 0,032 |

| Abfall in S. u. Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. | Abfall in S. u. Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 3¼ | 19,461 | 0,033 | 6 11 | 20,439 | 0,031 |
| 6 3½ | 19,494 | 0,032 | 6 11¼ | 20,470 | 0,030 |
| 6 3¾ | 19,526 | 0,032 | 6 11½ | 20,500 | 0,031 |
| 6 4 | 19,558 | 0,032 | 6 11¾ | 20,531 | 0,031 |
| 6 4¼ | 19,590 | 0,032 | 7 0 | 20,562 | 0,030 |
| 6 4½ | 19,622 | 0,032 | 7 ¼ | 20,592 | 0,031 |
| 6 4¾ | 19,654 | 0,032 | 7 ½ | 20,623 | 0,030 |
| 6 5 | 19,686 | 0,032 | 7 ¾ | 20,653 | 0,031 |
| 6 5¼ | 19,718 | 0,032 | 7 1 | 20,684 | 0,030 |
| 6 5½ | 19,750 | 0,032 | 7 1¼ | 20,714 | 0,030 |
| 6 5¾ | 19,782 | 0,032 | 7 1½ | 20,744 | 0,031 |
| 6 6 | 19,814 | 0,031 | 7 1¾ | 20,775 | 0,030 |
| 6 6¼ | 19,845 | 0,032 | 7 2 | 20,805 | 0,030 |
| 6 6½ | 19,877 | 0,082 | 7 2¼ | 20,835 | 0,030 |
| 6 6¾ | 19,909 | 0,031 | 7 2½ | 20,865 | 0,030 |
| 6 7 | 19,940 | 0,032 | 7 2¾ | 20,895 | 0,031 |
| 6 7¼ | 19,972 | 0,031 | 7 3 | 20,926 | 0,030 |
| 6 7½ | 20,003 | 0,032 | 7 3¼ | 20,956 | 0,030 |
| 6 7¾ | 20,035 | 0,031 | 7 3½ | 20,986 | 0,030 |
| 6 8 | 20,066 | 0,031 | 7 3¾ | 21,016 | 0,029 |
| 6 8¼ | 20,097 | 0,031 | 7 4 | 21,045 | 0,030 |
| 6 8½ | 20,128 | 0,031 | 7 4¼ | 21,075 | 0,030 |
| 6 8¾ | 20,159 | 0,032 | 7 4½ | 21,105 | 0,030 |
| 6 9 | 20,191 | 0,031 | 7 4¾ | 21,135 | 0,030 |
| 6 9¼ | 20,222 | 0,031 | 7 5 | 21,165 | 0,029 |
| 6 9½ | 20,253 | 0,031 | 7 5¼ | 21,194 | 0,030 |
| 9 9¾ | 20,284 | 0,031 | 7 5½ | 21,224 | 0,030 |
| 6 10 | 20,315 | 0,031 | 7 5¾ | 21,254 | 0,029 |
| 6 10¼ | 20,346 | 0,031 | 7 6 | 21,283 | 0,030 |
| 6 10½ | 20,377 | 0,031 | 7 6¼ | 21,313 | 0,029 |
| 6 10¾ | 20,408 | 0,031 | 7 6½ | 21,342 | 0,030 |

| Abfall in S.u.Zoll | | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. | Abfall in S.u.Zoll | | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 6¾ | 21,372 | | 8 | 2½ | 22,266 | 0,028 |
| 7 | 7 | 21,401 | 0,029 | 8 | 2¾ | 22,294 | 0,028 |
| 7 | 7¼ | 21,431 | 0,030 | 8 | 3 | 22,322 | 0,028 |
| 7 | 7½ | 21,460 | 0,029 | 8 | 3¼ | 22,350 | 0,028 |
| 7 | 7¾ | 21,489 | 0,029 | 8 | 3½ | 22,378 | 0,029 |
| 7 | 8 | 21,518 | 0,029 | 8 | 3¾ | 22,407 | 0,028 |
| 7 | 8¼ | 21,547 | 0,030 | 8 | 4 | 22,435 | 0,028 |
| 7 | 8½ | 21,577 | 0,029 | 8 | 4¼ | 22,463 | 0,028 |
| 7 | 8¾ | 21,606 | 0,029 | 8 | 4½ | 22,491 | 0,028 |
| 7 | 9 | 21,635 | 0,029 | 8 | 4¾ | 22,519 | 0,027 |
| 7 | 9¼ | 21,664 | 0,029 | 8 | 5 | 22,546 | 0,028 |
| 7 | 9½ | 21,693 | 0,029 | 8 | 5¼ | 22,574 | 0,028 |
| 7 | 9¾ | 21,722 | 0,029 | 8 | 5½ | 22,602 | 0,028 |
| 7 | 10 | 21,751 | 0,029 | 8 | 5¾ | 22,630 | 0,028 |
| 7 | 10¼ | 21,780 | 0,029 | 8 | 6 | 22,658 | 0,028 |
| 7 | 10½ | 21,809 | 0,029 | 8 | 6¼ | 22,686 | 0,027 |
| 7 | 10¾ | 21,838 | 0,029 | 8 | 6½ | 22,713 | 0,028 |
| 7 | 11 | 21,867 | 0,028 | 8 | 6¾ | 22,741 | 0,027 |
| 7 | 11¼ | 21,895 | 0,029 | 8 | 7 | 22,768 | 0,028 |
| 7 | 11½ | 21,924 | 0,029 | 8 | 7¼ | 22,796 | 0,028 |
| 7 | 11¾ | 21,953 | 0,028 | 8 | 7½ | 22,824 | 0,027 |
| 8 | 0 | 21,981 | 0,029 | 8 | 7¾ | 22,851 | 0,028 |
| 8 | ¼ | 22,010 | 0,028 | 8 | 8 | 22,879 | 6,027 |
| 8 | ½ | 22,038 | 0,029 | 8 | 8¼ | 22,906 | 0,028 |
| 8 | ¾ | 22,067 | 0,029 | 8 | 8½ | 22,934 | 0,027 |
| 8 | 1 | 22,096 | 0,028 | 8 | 8¾ | 22,961 | 0,028 |
| 8 | 1¼ | 22,124 | 0,028 | 8 | 9 | 22,989 | 0,027 |
| 8 | 1½ | 22,152 | 0,029 | 8 | 9¼ | 23,016 | 0,027 |
| 8 | 1¾ | 22,181 | 0,028 | 8 | 9½ | 23,043 | 0,028 |
| 8 | 2 | 22,209 | 0,028 | 8 | 9¾ | 23,071 | 0,027 |
| 8 | 2¼ | 22,237 | 0,029 | 8 | 10 | 23,098 | 0,027 |

| Abfall in S. u. Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. | Abfall in S. u. Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 10 1/4 | 23,125 | 0,027 | 9 6 | 23,954 | 0,026 |
| 8 10 1/2 | 23,152 | 0,027 | 9 6 1/4 | 23,980 | 0,026 |
| 8 10 3/4 | 23,179 | 0,028 | 9 6 1/2 | 24,006 | 0,026 |
| 8 11 | 23,207 | 0,027 | 9 6 3/4 | 24,032 | 0,026 |
| 8 11 1/4 | 23,234 | 0,027 | 9 7 | 24,058 | 0,027 |
| 8 11 1/2 | 23,261 | 0,027 | 9 7 1/4 | 24,085 | 0,026 |
| 8 11 3/4 | 23,288 | 0,027 | 9 7 1/2 | 24,111 | 0,026 |
| 9 0 | 23,315 | 0,027 | 9 7 3/4 | 24,137 | 0,026 |
| 9 1/4 | 23,342 | 0,027 | 9 8 | 24,163 | 0,026 |
| 9 1/2 | 23,369 | 0,027 | 9 8 1/4 | 24,189 | 0,026 |
| 9 3/4 | 23,396 | 0,026 | 9 8 1/2 | 24,215 | 0,026 |
| 9 1 | 23,422 | 0,027 | 9 8 3/4 | 24,241 | 0,026 |
| 9 1 1/4 | 23,449 | 0,027 | 9 9 | 24,267 | 0,026 |
| 9 1 1/2 | 23,476 | 0,027 | 9 9 1/4 | 24,293 | 0,026 |
| 9 1 3/4 | 23,503 | 0,027 | 9 9 1/2 | 24,319 | 0,025 |
| 9 2 | 23,530 | 0,026 | 9 9 3/4 | 24,344 | 0,026 |
| 9 2 1/4 | 23,556 | 0,027 | 9 10 | 24,370 | 0,026 |
| 9 2 1/2 | 23,583 | 0,027 | 9 10 1/4 | 24,396 | 0,026 |
| 9 2 3/4 | 23,610 | 0,026 | 9 10 1/2 | 24,422 | 0,026 |
| 9 3 | 23,636 | 0,027 | 9 10 3/4 | 24,448 | 0,025 |
| 9 3 1/4 | 23,663 | 0,027 | 9 11 | 24,473 | 0,026 |
| 9 3 1/2 | 23,690 | 0,026 | 9 11 1/4 | 24,499 | 0,026 |
| 9 3 3/4 | 23,716 | 0,027 | 9 11 1/2 | 24,525 | 0,025 |
| 9 4 | 23,743 | 0,026 | 9 11 3/4 | 24,550 | 0,026 |
| 9 4 1/4 | 23,769 | 0,027 | 10 0 | 24,576 | 0,025 |
| 9 4 1/2 | 23,796 | 0,026 | 10 1/4 | 24,601 | 0,026 |
| 9 4 3/4 | 23,822 | 0,029 | 10 1/2 | 24,627 | 0,026 |
| 9 5 | 23,848 | 0,027 | 10 3/4 | 24,653 | 0,025 |
| 9 5 1/4 | 23,875 | 0,026 | 10 1 | 24,678 | 0,026 |
| 9 5 1/2 | 23,901 | 0,026 | 10 1 1/4 | 24,704 | 0,025 |
| 9 5 3/4 | 23,927 | 0,027 | 10 1 1/2 | 24,729 | 0,025 |

| Abfall in S.u.Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. | Abfall in S.u.Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 1¾ | 24,754 | 0,026 | 10 9½ | 25,530 | 0,025 |
| 10 2 | 24,780 | 0,025 | 10 9¾ | 25,555 | 0,024 |
| 10 2¼ | 24,805 | 0,026 | 10 10 | 25,579 | 0,025 |
| 10 2½ | 24,831 | 0,025 | 10 10¼ | 25,604 | 0,025 |
| 10 2¾ | 24,856 | 0,025 | 10 10½ | 25,629 | 0,024 |
| 10 3 | 24,881 | 0,025 | 10 10¾ | 25,653 | 0,025 |
| 10 3¼ | 24,906 | 0,026 | 10 11 | 25,678 | 0,024 |
| 10 3½ | 24,932 | 0,025 | 10 11¼ | 25,702 | 0,025 |
| 10 3¾ | 24,957 | 0,025 | 10 11½ | 25,727 | 0,024 |
| 10 4 | 24,982 | 0,025 | 10 11¾ | 25,751 | 0,024 |
| 10 4¼ | 25,007 | 0,025 | 11 0 | 25,775 | 0,025 |
| 10 4½ | 25,032 | 0,026 | 11 ¼ | 25,800 | 0,024 |
| 10 4¾ | 25,058 | 0,025 | 11 ½ | 25,824 | 0,025 |
| 10 5 | 25,083 | 0,025 | 11 ¾ | 25,849 | 0,024 |
| 10 5¼ | 25,108 | 0,025 | 11 1 | 25,873 | 0,024 |
| 10 5½ | 25,133 | 0,025 | 11 1¼ | 25,897 | 0,024 |
| 10 5¾ | 25,158 | 0,025 | 11 1½ | 25,921 | 0,025 |
| 10 6 | 25,183 | 0,025 | 11 1¾ | 25,946 | 0,024 |
| 10 6¼ | 25,208 | 0,025 | 11 2 | 25,970 | 0,024 |
| 10 6½ | 25,233 | 0,025 | 11 2¼ | 25,994 | 0,024 |
| 10 6¾ | 25,258 | 0,025 | 11 2½ | 26,018 | 0,025 |
| 10 7 | 25,283 | 0,025 | 11 2¾ | 26,043 | 0,024 |
| 10 7¼ | 25,307 | 0,025 | 11 3 | 26,067 | 0,024 |
| 10 7½ | 25,332 | 0,025 | 11 3¼ | 26,091 | 0,024 |
| 10 7¾ | 25,357 | 0,025 | 11 3½ | 26,115 | 0,024 |
| 10 8 | 25,382 | 0,025 | 11 3¾ | 26,139 | 0,024 |
| 10 8¼ | 25,407 | 0,024 | 11 4 | 26,163 | 0,024 |
| 10 8½ | 25,431 | 0,025 | 11 4¼ | 26,187 | 0,024 |
| 10 8¾ | 25,456 | 0,025 | 11 4½ | 26,211 | 0,024 |
| 10 9 | 25,481 | 0,025 | 11 4¾ | 26,235 | 0,024 |
| 10 9¼ | 25,506 | 0,024 | 11 5 | 26,259 | 0,024 |

| Abfall in S. u. Zoll | | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. | Abfall in S. u. Zoll | | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 5 1/4 | 26,283 | 0,024 | 12 | 1 | 26,015 | 0,023 |
| 11 | 5 1/2 | 26,307 | 0,024 | 12 | 1 1/4 | 27,038 | 0,023 |
| 11 | 5 3/4 | 26,331 | 0,024 | 12 | 1 1/2 | 27,061 | 0,024 |
| 11 | 6 | 26,355 | 0,024 | 12 | 1 3/4 | 27,085 | 0,023 |
| 11 | 6 1/4 | 26,379 | 0,023 | 12 | 2 | 27,108 | 0,023 |
| 11 | 6 1/2 | 26,402 | 0,024 | 12 | 2 1/4 | 27,131 | 0,023 |
| 11 | 6 3/4 | 26,426 | 0,024 | 12 | 2 1/2 | 27,154 | 0,023 |
| 11 | 7 | 26,450 | 0,024 | 12 | 2 3/4 | 27,177 | 0,023 |
| 11 | 7 1/4 | 26,474 | 0,024 | 12 | 3 | 27,201 | 0,023 |
| 11 | 7 1/2 | 26,498 | 0,023 | 12 | 3 1/4 | 27,224 | 0,023 |
| 11 | 7 3/4 | 26,521 | 0,024 | 12 | 3 1/2 | 27,247 | 0,023 |
| 11 | 8 | 26,545 | 0,024 | 12 | 3 3/4 | 27,270 | 0,023 |
| 11 | 8 1/4 | 26,569 | 0,023 | 12 | 4 | 27,293 | 0,023 |
| 11 | 8 1/2 | 26,592 | 0,024 | 12 | 4 1/4 | 27,316 | 0,023 |
| 11 | 8 3/4 | 26,616 | 0,024 | 12 | 4 1/2 | 27,339 | 0,023 |
| 11 | 9 | 26,640 | 0,023 | 12 | 4 3/4 | 27,362 | 0,023 |
| 11 | 9 1/4 | 26,663 | 0,024 | 12 | 5 | 27,385 | 0,023 |
| 11 | 9 1/2 | 26,687 | 0,023 | 12 | 5 1/4 | 27,408 | 0,023 |
| 11 | 9 3/4 | 26,710 | 0,024 | 12 | 5 1/2 | 27,431 | 0,023 |
| 11 | 10 | 26,734 | 0,024 | 12 | 5 3/4 | 27,454 | 0,023 |
| 11 | 10 1/4 | 26,758 | 0,023 | 12 | 6 | 27,477 | 0,023 |
| 11 | 10 1/2 | 26,781 | 0,024 | 12 | 6 1/4 | 27,500 | 0,023 |
| 11 | 10 3/4 | 26,805 | 0,023 | 12 | 6 1/2 | 27,523 | 0,022 |
| 11 | 11 | 26,828 | 0,023 | 12 | 6 3/4 | 27,545 | 0,023 |
| 11 | 11 1/4 | 26,851 | 0,024 | 12 | 7 | 27,568 | 0,023 |
| 11 | 11 1/2 | 26,875 | 0,024 | 12 | 7 1/4 | 27,591 | 0,023 |
| 11 | 11 3/4 | 26,899 | 0,023 | 12 | 7 1/2 | 27,614 | 0,023 |
| 12 | 0 | 26,922 | 0,023 | 12 | 7 3/4 | 27,637 | 0,022 |
| 12 | 1/4 | 26,945 | 0,023 | 12 | 8 | 27,659 | 0,023 |
| 12 | 1/2 | 26,968 | 0,023 | 12 | 8 1/4 | 27,682 | 0,023 |
| 12 | 3/4 | 26,992 | 0,023 | 12 | 8 1/2 | 27,705 | 0,022 |

| Abfall in S.u.Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. | Abfall in S.u.Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 8 3/4 | 27,727 | 13 | 4 1/2 | 28,422 |
| | | 0,023 | | | 0,022 |
| 12 | 9 | 27,750 | 13 | 4 3/4 | 28,444 |
| | | 0,023 | | | 0,022 |
| 12 | 9 1/4 | 27,773 | 13 | 5 | 28,466 |
| | | 0,022 | | | 0,023 |
| 12 | 9 1/2 | 27,795 | 13 | 5 1/4 | 28,489 |
| | | 0,023 | | | 0,023 |
| 12 | 9 3/4 | 27,818 | 13 | 5 1/2 | 28,512 |
| | | 0,023 | | | 0,021 |
| 12 | 10 | 27,841 | 13 | 5 3/4 | 28,533 |
| | | 0,022 | | | 0,022 |
| 12 | 10 1/4 | 27,863 | 13 | 6 | 28,555 |
| | | 0,022 | | | 0,022 |
| 12 | 10 1/2 | 27,885 | 12 | 6 1/4 | 28,577 |
| | | 0,023 | | | 0,022 |
| 12 | 10 3/4 | 27,908 | 13 | 6 1/2 | 28,599 |
| | | 0,023 | | | 0,022 |
| 12 | 11 | 27,931 | 13 | 6 3/4 | 28,621 |
| | | 0,022 | | | 0,022 |
| 12 | 11 1/4 | 27,953 | 13 | 7 | 28,643 |
| | | 0,023 | | | 0,022 |
| 12 | 11 1/2 | 27,976 | 13 | 7 1/4 | 28,665 |
| | | 0,022 | | | 0,022 |
| 12 | 11 3/4 | 27,998 | 13 | 7 1/2 | 28,687 |
| | | 0,023 | | | 0,022 |
| 13 | 0 | 28,021 | 13 | 7 3/4 | 28,709 |
| | | 0,022 | | | 0,021 |
| 13 | 1/4 | 28,043 | 13 | 8 | 28,730 |
| | | 0,023 | | | 0,022 |
| 13 | 1/2 | 28,066 | 13 | 8 1/4 | 28,752 |
| | | 0,022 | | | 0,022 |
| 13 | 3/4 | 28,085 | 13 | 8 1/2 | 28,774 |
| | | 0,023 | | | 0,022 |
| 13 | 1 | 28,111 | 13 | 8 3/4 | 28,796 |
| | | 0,022 | | | 0,022 |
| 13 | 1 1/4 | 28,133 | 13 | 9 | 28,818 |
| | | 0,022 | | | 0,022 |
| 13 | 1 1/2 | 28,155 | 13 | 9 1/4 | 28,840 |
| | | 0,023 | | | 0,022 |
| 13 | 1 3/4 | 28,178 | 13 | 9 1/2 | 28,862 |
| | | 0,022 | | | 0,021 |
| 13 | 2 | 28,200 | 13 | 9 3/4 | 28,883 |
| | | 0,022 | | | 0,022 |
| 13 | 2 1/4 | 28,222 | 13 | 10 | 28,905 |
| | | 2,023 | | | 0,022 |
| 13 | 2 1/2 | 28,245 | 13 | 10 1/4 | 29,927 |
| | | 0,022 | | | 0,022 |
| 13 | 2 3/4 | 28,267 | 13 | 10 1/2 | 29,949 |
| | | 0,022 | | | 0,022 |
| 13 | 3 | 28,289 | 13 | 10 3/4 | 29,970 |
| | | 0,023 | | | 0,022 |
| 13 | 3 1/4 | 28,312 | 13 | 11 | 29,992 |
| | | 0,022 | | | 0,022 |
| 13 | 3 1/2 | 28,334 | 13 | 11 1/4 | 29,014 |
| | | 0,022 | | | 0,021 |
| 13 | 3 3/4 | 28,356 | 13 | 11 1/2 | 29,035 |
| | | 0,022 | | | 0,022 |
| 13 | 4 | 28,378 | 13 | 11 3/4 | 29,057 |
| | | 0,022 | | | 0,022 |
| 13 | 4 1/4 | 28,400 | 14 | 0 | 29,079 |
| | | 0,022 | | | 0,021 |

| Abfall in S.u.Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. | Abfall in S.u.Zoll | Geschw. in Schuhen. | Unterschied der Geschwind. |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 $\frac{1}{4}$ | 29,100 | 0,022 | 14 $6\frac{1}{4}$ | 29,615 | 0,021 |
| 14 $\frac{1}{2}$ | 29,122 | 0,022 | 14 $6\frac{1}{2}$ | 29,636 | 0,021 |
| 14 $\frac{3}{4}$ | 29,144 | 0,022 | 14 $6\frac{3}{4}$ | 29,657 | 0,022 |
| 14 1 | 29,166 | 0,021 | 14 7 | 29,679 | 0,021 |
| 14 $1\frac{1}{4}$ | 29,187 | 0,021 | 14 $7\frac{1}{4}$ | 29,700 | 0,021 |
| 14 $1\frac{1}{2}$ | 29,208 | 0,021 | 14 $7\frac{1}{2}$ | 29,721 | 0,021 |
| 14 $1\frac{3}{4}$ | 29,229 | 0,022 | 14 $7\frac{3}{4}$ | 29,742 | 0,021 |
| 14 2 | 29,251 | 0,021 | 14 8 | 29,763 | 0,021 |
| 14 $2\frac{1}{4}$ | 29,272 | 0,022 | 14 $8\frac{1}{4}$ | 29,784 | 0,022 |
| 14 $2\frac{1}{2}$ | 29,294 | 0,022 | 14 $8\frac{1}{2}$ | 29,806 | 0,021 |
| 14 $2\frac{3}{4}$ | 29 316 | 0,021 | 14 $8\frac{3}{4}$ | 29,827 | 0,021 |
| 14 3 | 29,337 | 0,021 | 14 9 | 29,848 | 0,021 |
| 14 $3\frac{1}{4}$ | 29,358 | 0,021 | 14 $9\frac{1}{4}$ | 29,869 | 0,021 |
| 14 $3\frac{1}{2}$ | 29,379 | 0,022 | 14 $9\frac{1}{2}$ | 29,890 | 0,022 |
| 14 $3\frac{3}{4}$ | 29,401 | 0,022 | 14 $9\frac{3}{4}$ | 29,912 | 0,021 |
| 14 4 | 29,423 | 0,021 | 14 10 | 29,933 | 0,021 |
| 14 $4\frac{1}{4}$ | 29,444 | 0,022 | 14 $10\frac{1}{4}$ | 29,954 | 0,021 |
| 14 $4\frac{1}{2}$ | 29,466 | 0,021 | 14 $10\frac{1}{2}$ | 29,975 | 0,022 |
| 14 $4\frac{3}{4}$ | 29,487 | 0,021 | 14 $10\frac{3}{4}$ | 29,997 | 0,022 |
| 14 5 | 29,508 | 0,022 | 14 11 | 30,019 | 0,022 |
| 14 $5\frac{1}{4}$ | 29,530 | 0,021 | 14 $11\frac{1}{4}$ | 30,041 | 0,021 |
| 14 $5\frac{1}{2}$ | 29,551 | 0,021 | 14 $11\frac{1}{2}$ | 30,062 | 0,021 |
| 14 $5\frac{3}{4}$ | 29,572 | 0,021 | 14 $11\frac{3}{4}$ | 30,083 | 0,021 |
| 14 6 | 29,593 | 0,022 | 15 0 | 30,004 | 0,021 |

# Inhalt.

## Zweyter Theil der Mechanik.

### Von den flieſsigen Körpern.

#### Von ihrem Gleichgewichte, und von Eintauchung der festen Körper.

591.

Was Statik, Geostatik, Hydrostatik, Mechanik, Hydraulik, Dynamik, Hydrodynamik, Aerometrie? 592. Was zu erst zu untersuchen. 593. Eintheilung der Flieſsigen. 594. Höhe des Wassers in zweyen vereinigten Röhren. 595: Was das untere Flieſsige zum Gleichgewichte des obern beytrage; und wie der Druck auf das Flieſsige beschaffen. 596. Und sein Druck gegen die Fläche des Gefäſses. 597. Richtung der Kräfte auf die Oberfläche des Flieſsigen. 598. Die von der Schwere. 599. Gröſse des Druckes gegen eine Fläche. 600. Gegen die obere. 601. Gegen die Grundfläche. 602. Das Gleichgewicht ungleichartiger Flieſsigen. 603. Unterschied des Druckes fester und flieſsiger Körper. 604. Schwere des Flieſsigen im Gefäſse. 605 u. 606. Druck gegen eine unendlichkleine Fläche. 607. Gegen eine endliche. 608. Durch welchen

Punkt

Punkt der zusammengesetzte gehe. 609. Der zusammengesetzte aus den horizontalen und vertikalen Drücken. 610. Ausdruck der vertikalen Kraft. 611. Vertikale Kraft des Wassers in einem Gefäße, und dessen vertikaler Druck gegen einen eingetauchten Körper. 612. Verlust der Schwere eines eingetauchten Körpers. Mittelpunkt des vertikalen Druckes. 614. Die horizontalen Kräfte heben sich auf. 615. Wie weit sich der leichtere Körper eintauche. 616. Wie viel ein schwimmender Körper durch ein zugesetztes Gewicht sich tiefer eintauche, 617. Ob jede Materie könne schwimmend gemacht werden. 618. Schwere Körper im Wasser zu heben. 619. Größe des eingetauchten Theiles des schwimmenden Körpers. 620. Verhältniß der Größen des schwimmenden Körpers und seines eingetauchten Theiles. 621. Die Wasserwage. 622. Das Verhältniß der Schweren eines Fließigen und festen Körpers zu finden. 623. Das von zwey Fließigen Körpern zu finden. 624. Verhältniß der Dichte der Körper. 625. Bedingung des Gleichgewichts eines festen Körpers auf einem Fließigen. 626. Selbiges zu bestimmen. 627. Auch damals, wann der Körper nicht gleichartig ist. 628. Was noch für eine Frage. 629. Obermittelpunkt.

## Von elastischen Körpern.

630.

Das elastische Fließige; und sein Druck. 631. Diesen Druck gegen eine Fläche zu finden. 632. Was bey der Luft zu betrachten. 633. Ihre Schwere. 634. Ihre Elasticität. 635. Druck der freyen Luft. 636. Der eingeschlossenen. 637. Barometer. 638. Seine Veränderung; und des Wassers größte Höhe in den Pumpen. 639. Höhen des Queckstlbers im Barometer an hohen und niedrigen Oertern; und die des Wassers in Saugwerken. 640. Zusammendrücklichkeit der Luft; und wie jene Höhe des Queckstlbers durch Rechnung zu finden. 641. Die Dichte der dasigen Luft zu finden. 642. Saugwerk, Kolben, Ventil, verkehrte Pumpe; Druckwerk, und wie sich das Wasser darin hebe. 643. Die hebende Kraft. 644. Wie hoch das Wasser im Saugwerke steige; und was erfodert wird,

damit es seine Wirkung mache. 645. Wie, wann der Druck der Luft größer oder kleiner, als der von 32 Schuh Wasser; und wann die Saugröhre enger als der Spielraum des Kolbens. 646. Kraft beym Saugwerke. 647. Erklärung des Hebers und seiner Wirkung. 648. Wirkung des Aussaugens der Luft aus einer Flasche. 649. Woher die Mühe einen verstopften Blasbalg auf zu ziehen. 659. Druck der Erde und Dicke der Futtermauer.

## Von der Bewegung der Fließigen.

651.

Kräfte, wodurch die Fließigen beweget werden. 652. Wie das Wasser durch untere Oeffnungen aus Gefäßen rinne; die Wasserader und seine Geschwindigkeit. 653. Die Menge des ausfließenden Wassers. 654. Verhältniß der Geschwindigkeiten der ausrinnenden Fließigen überhaupt. 655. Erfoderliche Weite solcher Gefäße, aus welchen das Fließige mit der größten Geschwindigkeit auslaufen soll. 656. Wirkliche Geschwindigkeit des auslaufenden Fließigen. 657. Geschwindigkeit des Fließigen durch Seitenlöcher. 658. Geschwindigkeit der aus einem Gefäße in einen leeren Raum blasenden Luft; und Nutzen dieser Kenntniß. 659. Verhältnißmäßige mittlere proportionale Geschwindigkeit des Fließigen durch Seitenöffnungen. 660. Menge des aus einem stets vollen Gefäße in einer gewissen Zeit auslaufenden Fließigen. 661e Zeit der Ausleerung eines gleichweiten Gefäßes. 662. Menge des Fließigen, welches in derselben Zeit ausläuft, da das Gefäß durch einen Zufluß voll bleibt. 663. Die Zeit zu finden, in welcher das Fließige in einem gleichweiten Gefäße, um eine gewisse Tiefe sinkt.

664. Die Zeit zu finden, in welcher ein Gefäß von ungleicher Weite, die sich wie eine Potenz ihrer Höhe über der Oeffnung verhalt, ausgeleeret werde; und auch die, in welcher das Fließige um eine gewisse Tiefe sinkt. 665. Ein Gefäß, worin das Fließige, während der Ausleerung, in gleichen Zeiten gleich tief sinkt. 666. Die Zeit, in welcher ein Gefäß, in welches das Wasser aus einem stets vollen gleichhohen Gefäße durch die untere Oeffnung bringet, angefüllet werde. 667. Die Zeit zu finden, in welcher das erste dieser Gefäße, da sie gleichweit sind, halb leer,

und

und das andere halb voll werde, im Falle sie eine kleine Oeffnung haben. 668. Schwankung des Wassers in einer krummen Röhre. 669. Aehnlichkeit dieser Schwankung mit dem Schwunge des Pendels. 670. Die Eigenschaften dieser Schwankung durch ihre Natur und Rechnung zu bestimmen. 671. Erklärung der Wasserwogen. 672. Geschwindigkeit und Menge des aus einem weiten Gefäße durch eine enge Röhre fließenden Wassers. 673. Die Zeit der Ausleerung dieses Gefäßes zu finden. 674. Nutzen dieser Lehre; u. Kraft des Menschen in Bewegung einer Wassersaule. 675. Die Wassersäule zu finden, die von einer gegebenen Kraft des Menschen mit einer ihm möglichen Geschwindigkeit beweget werde; und umgekehrt bey ungleich weiter Röhre; und Nachtheil der engen Röhren und Ventile. 676. Druck und Geschwindigkeit des aus einem bewegten Gefäße ausfließenden Wassers. 677 Wirkliche und natürliche Wasserverschwendungen nach Herrn Bossut und Belidorn. 678. Geschwindigkeit, Menge, Zeit und Höhe des springenden Wassers. 679. Diese Höhe und Zeit beym Widerstande der Luft. 680. Acht Versuche über das springende Wasser, und ihre Vergleichung mit der Theorie. 681. Gestalt des schief springendenden Wassers. 682. Jeden Punkt dieses krummen Strahles zu finden. 683. Die horizontale Weite und den Richtwinkel dieses Sprunges zu finden; und die größte Weite. 684. Was der Luft Widerstand verursachet. 685. Noch andere Gestalten des springenden Wassers. 686. Geschwindigkeit des aus Gefäßen durch Röhren fließenden Wassers. 687. Seine Kraft und Figur. 688. Körperlicher Inhalt des Wasserstrahles. 689. Versuche der Menge des durch Röhren fließenden Wassers. 690. Druck des in Röhren bewegten Wassers gegen ihre Wände. 691. Beweis davon, und Anwendung auf Wasserleitungen. 692. Versuche und Bestätigung dieser Theorie. 693. Wozu alle diese Schlüsse? 694. Widerstand der Reibung bey Wasserleitungen. 695. Skale oder Stufenline der Geschwindigkeiten und Widerstände des Reibens des in Röhren geleiteten Wassers. 696. Bewegung des Wassers in Canälen; entgegen gesetzte Ströme. 697. Unterschied der Wasserverschwendung mittelst einer Röhre und eines Kanals. 698. Ob der Ausfluß auch durch einen Kanal gehindert werden könne. 699. Aehnlichkeit zwischen den Wasserleitungen in Röhren und Rinnen, mit Folgen. 700. Geschwindigkeit des Wassers bey schiefen Rinnen. 701. Bey krummen Kanälen.

702. Ursache des in Bächen und Flüssen bewegten Wassers. 703. Die Geschwindigkeit des Stromes zu erkennen, dienen schwimmende Körper. 704. Wie auch leichte unterschlägtige Wasserräder. 705. Des Guglielmini Regulator. 706. Pitots gebogene Röhre. 707. Der Quadrant mit einer Kugel am Faden. 708. Das Dreyeck mit solcher Kugel. 709. Bequemlichkeit dieser letzten, bey der Tiefe.

# Inhalt

## Von dem Stoße und Widerstande der fließigen Körper.

---

### 710.

Nach wem dieser abgehandelt werde. 711. Ausdruck dieses Widerstandes. 712. Ist allgemein. 713. Verhältniß dieser Widerstände. 714. Diejenige, wann die Flächen und Dichten einerley. 715. Die, wann die Flächen und Geschwindigkeiten gleich sind. 716. Der Widerstand elastischer Fließigen. 717. Stoß des Fließigen. 718. Noch ein Ausdruck des Widerstands und Stoßes des Fließigen in bekanntern Maßen. 719. Wie der vom Bezout gelte. 720. Unterschied des Stoßes und Widerstandes eines fließigen und festen Körpers. 721. Ob bey dem Stoße unvollkommen fester Körper auch ein Druck geschehe. 722. Größe dieses Druckes. 723. Den ungleichen zu finden. 724. Den Eindruck durch Versuche zu finden. 725. Bey marmernen Kugeln. 726. Formeln von Einrammung der Pfähle; ihr Vorzug. 727. Die Schwere des auf Bürsten zu errichtenden Gebäues zu finden; 2) ob diese unendlich seyn kann; 3) vom Schwungrade.

## Vom Widerstand der schiefen Ebenen.

---

### 728.

Ausdruck des schiefen Stoßes oder Widerstandes fließiger Körper. 729. Verhältniß des geraden und schiefen. 730. Die Wirkung des schiefen Stoßes nach einer andern, als der senkrechten zu erkennen. 731. Verhältniß der senkrechten Wirkung und einer andern. 732. Die auf was immer für eine Fläche senkrecht. 733. Die Projektion einer Ebene. 734.

Wirkung auf die Ebene der Projektion. 735. Wenn der Körper aus mehr Ebenen besteht.

## Von dem Widerstande eines Körpers, der durch Umdrehung um seine Achse erzeuget wird.

736.

Dieser ganze Widerstand hat die Richtung der Achse. 737. Seinen Werth zu finden. 738. Der von der Kugel.

## Von der geradlinichten Bewegung der Körper in einem widerstehenden Raume.

739.

Was dieser Widerstand für Veränderung hervorbringe. 740. Die Geschwindigkeit im widerstehenden Raume. 741. Der Durchlaufene Raum. 742. Geradlinichte Bewegung schwerer Körper, ihre Geschwindigkeit. 743. Ihr Raum. 744. Die Geschwindigkeit des aufsteigendem Körpers. 745. Sein Raum. 746. Seine ganze Höhe. 747. Ein Beyspiel in Betreff des Raumes. 748. In Betreff der Geschwindigkeit. 749. Wachsthum der Geschwindigkeit. 750. Wann die Geschwindigkeit am größten.

# Inhalt

## Von der Geschwindigkeit, welche die geworfenen Körper durch die Wirkung eines verdickerten elastischen Fließigen, wie die Luft oder das entzündete Pulver ist, erlangen können.

751.

Die Geschwindigkeit der Kugel in was immer für einem Punkte der Länge des Geschützes. 752. Z. B. in der Windbüchse. 753. Beßte Länge des Stückes. 754. Die Ladung einer bestimmten Geschwindigkeit. 755. Die beßte Ladung. 756. Eigenschaft des Pulvers; und was dabey noch zu beobachten. 757. Was voraus gesetzet worden.

## Von der Kraft des Zurückstoßes der Luft- und Feuergewehre.

758.

Wirkung der Kraft in der Seele des Stückes. 759. Die Geschwindigkeiten zweyer durch eine Feder voneinander getriebener Körper. 760. Anwendung auf die Kanone. 761. Ein Beyspiel. 762. Mit Betracht des Widerstandes der Luft. 763. Kraft der Pulvers. 764. Rücklauf ohne Kugel; und das Steigen der Rakete.

Von

# Inhalt

## Von der Bewegung der in einem widerstehenden Raume geworfenen Körper.

765.

Die Krumme dieser Bewegung. 766. Ob die Betrachtung des Widerstandes der Luft nothwendig. 767. Versuche hierüber. 768. Zwey Gleichungen von dieser Bewegung im widerstehenden Raume. 769. Probe dieser Gleichungen. 770. Die zuintegrirende Gleichung dieser krummen Line. 771. Integrale des zweyten Gliedes. 772. Tangente des Winkels, welchen diese Krumme in jedem Punkte mit dem Horizonte machet. 773. Werth der beständigen Größe. 774. Gleichung, die zu integriren. 775. Diese Krumme ist eine Parabel, wann der Widerstand oder die Geschwindigkeit sehr klein ist. 776. Verwandlung der Gleichung. 777. Wie diese leicht zu integriren. 778. Wie weit eine Größe darin als beständig zu setzen. 779. Schickliche Voraussetzung. 780. Gleichung für die Würfe unter Winkeln, die wenig über 25 Grad sind. 781. Fall der Gleichung für die ganze Line. 782. Schußweiten unserer Annäherung. 783. Die beym aufsteigenden Aste. 784. Die beym absteigenden. 785. Bequeme Gestalt zur Zahlrechnung. 786. Annähernde Gleichung. 787. Beyspiel. 788. Kraft des Pulvers. 789. Geschwindigkeit der Stückkugel: die größte. 790. Vergleichung der Theorie mit Versuchen, in Betreff der Schußweiten und Höhen. 791. Formel über die Schußhöhe. 792. Ueber die Zeit. 793. Beyspiele darüber, mit und ohne Widerstand der Luft. 794. Anfänglicher Widerstand der Luft.

## Von Ricocheten oder Prällschüssen.

795.

Erklärung des Prällschusses. 796. Wie er möglich. 797. Wovon er abhange. 798. Prällschuß auf dem Wasser. 799. Der Weg des Mittelpunkts. 800. Prällschuß eines elastischen Körpers auf einem andern ebenen festen. 801. Was die Reibung beytrage. 802. Ob die krumme Line beym Einsenken zu bestimmen.

# Inhalt

## Von hydraulischen Maschinen.

803.

Erklärung der hydraulischen Maschine. 804. Ihre Wirkung 805. Wovon wir hier handeln.

## Von den unterschlägtigen Wasserrädern.

806.

Ihre Erklärung; der Schaufeln Höhe und Breite. 807. Wovon des Rades Kraft abhange. 808. Seine nutzbare Wirkung. 809. Was da die Kraft und ihre Geschwindigkeit. 810. Des Stromes seine im Stande des Gleichgewichtes. 811. Bewegungskraft und Geschwindigkeit des unterschlägtigen Rades.

812. Die Parentische Bestimmung.

813. Größte Wirkung der Kraft beym unterschlägtigen Rade, in Betreff der senkrechten Schaufel. 814. In Betreff der schiefen. 815. Zahl der Schaufeln. 816. Vortheilhafte Einrichtung des unterschlägtigen Rades. 817 Größte und kleinste Wirkung bey diesem Rade. 818. Einige Versuche von Bossut. 819 u. 820. Noch mehrere, und ihre Vergleichung mit den Theorien. 821. Einige über schiefe Schaufeln. 822. Horizontalräder. 823. Mit spiralförmigen Schaufeln.



Von

# Inhalt

## Von den oberschlägtigen Wasserrädern.

824.

Ihre Erklärung. 825. Ihre Kraft. 826. Ihr Moment. 827. Ihre Wirkung. Die größte. 828. Ausdruck derselben. 829. Ihr Nutzen. 830. Uebereinstimmung mit dem unterschlägtigen. 831. Verbesserung eines Mengels. 832. Welches vortheilhafter, das unterschlägtige oder das oberschlägtige. 833. Wann des letzten Wirkung größer. 834. Verhältniß der Wirkungen beider Räder. 835. Wo jedes mit Vortheil zu brauchen. 836. Versuche über die Wirkung der oberschlägtigen. 837. Ob sie mit der Regel übereinstimmen. 838. Größte Wirkung eines fertigen Rades zu finden. 839. Beider Räder Wirkung zu vermehren.

## Von Windrädern und Windflügeln.

840.

Beschreibung eines horizontalen Windrades. 841. Kraft des Windes. 842. Windflügel; wann sie durch den Wind können, und nicht können umgetrieben werden. 843. Umtreibende Kraft. 844. Wann sie am größten. 845. Auch in der Bewegung? und welche Rechnung nicht bestehen könne. 846. Antreibende Kraft der Windflügel, wenn ihres äußersten Punktes Geschwindigkeit, der vom Winde gleich ist. 847. Ihr Moment. 848. Ihre Entfernung. 849. Dieser Kraft Moment und Entfernung, wenn jenes Punktes Geschwindigkeit kleiner ist. 850. In welchem dieser beiden Fälle die Wirkung größer. 851. Kraft, Moment und Entfernung, wenn die Windflügel eine Entfernung von der Achse haben. 852. Geschwindigkeit der größten Wirkung. 853. Kraft, Moment und Entfernung bey dreyeckigen Windflügeln, wenn ihres äußersten Punktes Geschwindigkeit, der vom Winde gleich ist. 854. Die, wenn sie kleiner ist. 855. Die von der größten Wir-

kung. 856. Grundline der Windflügel, bey genauer Rechnung. 857. Bey welchen Flügeln größere Wirkung. 858. Verhältniß der Wirkung der drey- und viereckigen Flügel. 859. Nutzen der Momente. 860. Anwendung der Wasserräder und Windflügel.

## Von einigen Maschinen, durch welche Wasser gehoben wird.

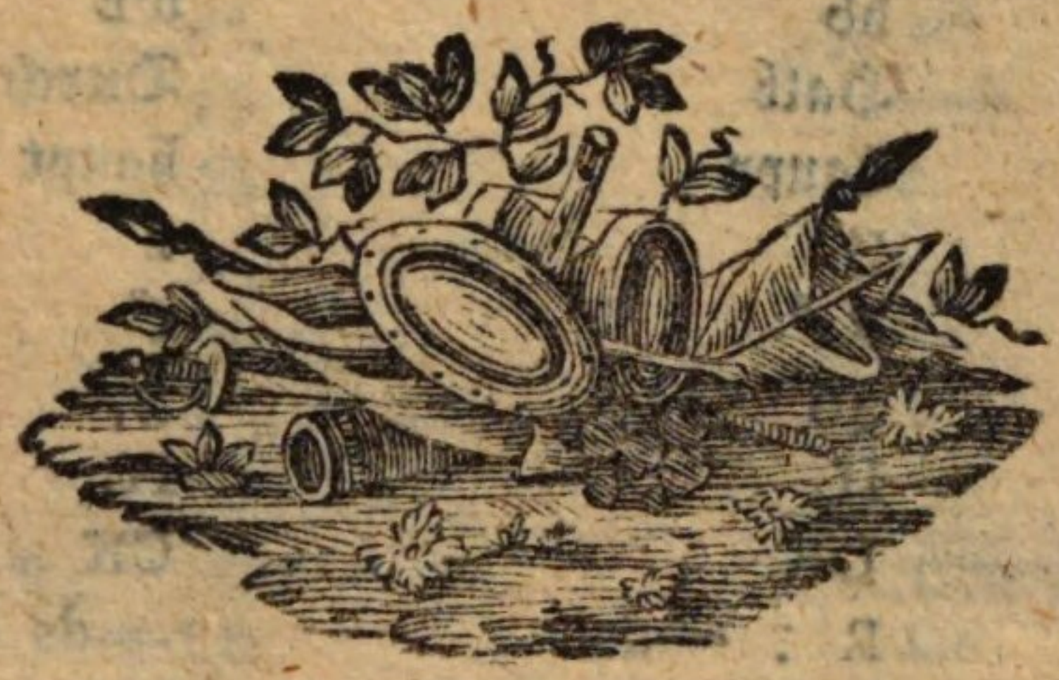
861.

Welche diese seyen. 862. Schaufelwerk. 863. Neigungswinkel nach Belidorn. 864. Ob dabey eine größte Wirkung. 865. Unter welchem Winkel die größte Menge Wasser auf die größte Höhe gehoben werde. 866. Wozu dieses. 867. Bey welchem mehr Wirkung. 868. Püschelkunst. 869. Kasten- oder Eimerkunst. 870. Schöpfrad. 871. Archimedische Wasserschraube. 872. Die Wasserschrauben in Holland. 873. Wer davon gehandelt. 874. Der Wasserschraube Grundfläche, ganzer Schraubengang, Seitenlinen, Neigungswinkel, Seitenwinkel, Schrauben- oder Kreißwinkel. 875. Niedrigster Punkt des Schraubenganges. 876. Höchster Punkt. 877. Sinus der ihnen zugehörigen Bogen. 878. Wann diese zwey Punkte in einen zusammen fallen. 879. Wann sie unmöglich. 880. Wie da ein Körper steige. 881. Kraft der Wasserschraube. 882. Dieselbe nach einer andern Rechnung.

883. Geschwindigkeit des bewegten Körpers. 884. Die Zeit der Umdrehung. 885. Die kleinste. 886. Wann der Körper mit im Kreiße herum gerissen werde, und nicht steige. 887. Stete Beschleunigung ist möglich. 888. Auch wann der Körper im niedrigsten Punkte liegt, oder nur um eine unendlichkleine Größe davon entfernt ist. 889. Die Seitenline in welcher der Körper hinauf steiget. 890. Der wassertragende Bogen. 891. Werth der Höhe des höchsten über den niedrigsten Punkt des wassertragenden Bogens. 892. Größe dieses Bogens im Stande des Gleichgewichtes. 893. In der Bewegung. 894. Ort des Schraubenganges, wo er mit dem Horizonte einen gegebenen Winkel machet. 895. Sinus dieses Winkels in der obersten und untersten Seitenline. 896. Sinus dieses Winkels in der Mitte. 897. Was noch zu bestimmen.

# Inhalt

Acht Tafeln I. Von Vergleichung der Schuhmaße. II. u. III. der Gewichter. IV. Der eigenthümlichen Schwere einiger Körper. V. VI. u. VII. Versuche über die Stärke einiger Körper. VIII. Geschwindigkeiten bey verschiedenem Falle des Wassers.



Feh-

# Fehler,

## Die bemerket worden, noch im I. Theile.

| Seite | Zeile | Statt | Lies |
|---|---|---|---|
| 193 | 29 | 30 | 20 |
| 199 | 17 | )ſinb | )lſinb |
| 206 | 30 | +M″ | —M″ |
| 211 | 14 | lſt | iſt |
| 213 | 8 | der | die |
| 223 | 29 | C | c |
| 225 | 7 | hb | h′b |
| 225 | 19 | Halb | Durch |
| 231 | 1 | haupr | haupt |
| 238 | 10 | Z | z |
| 240 | 12 | $Rr^3$ | $s^3$ |
| 252 | 22 | 46 | 37 |
| 277 | 19 | iL | IL |
| 325 | 22 | DK | CK |
| 333 | 10 | R : —ds | —ds : R |
| 333 | 12 | dem | den |
| 334 | 3 | s | —s |
| 336 | 26 | gliſchete | glitſchete |

## Im II. Theile.

| Seite | Zeile | Statt | Lies |
|---|---|---|---|
| 9 | 19 | ſpciſiſchen | ſpeciſiſchen |
| 9 | 27 | 129 | 229 |
| 10 | 2 | ſließige | Fließige |
| 15 | 2 | nnd | und |
| 15 | 6 | CE | CD |
| 15 | 23 | iuſt | iuſt |
| 15 | 28 | Grnnd | Grund |
| 29 | 16 | C | G |
| 34 | 25 | ſänle | ſäule |
| 42 | 1 | fünf | zehn |
| 42 | 1 u. 2 | das iſt | und |
| 44 | 12 | muß muß | muß |

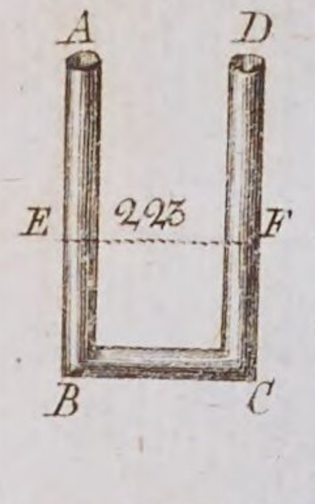
# Druckfehler.

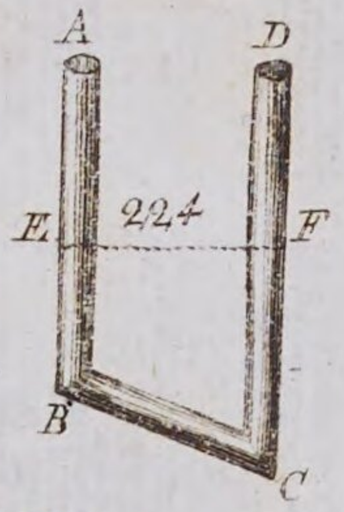
| Seite | Zeile | Statt | Lies |
|---|---|---|---|
| 44 | 17 | D : p | p : D |
| 45 | 12 | Pulmp | Plump |
| 51 | 21 | gedauten | gebauten |
| 52 | 14 | AB′ | AB |
| 53 | 16 | ein | eine |
| 56 | 31 | Drucke | drucke |
| 60 | 23 | ist | ich |
| 60 | 23 | jedem | jeden |
| 63 | 21 | dunkte | ducte |
| 66 | 20 | 257 | 258 |
| 67 | 27 | sa | so |
| 68 | 4 | 7,26 | 6,66 |
| 69 | 5 | FO | NO |
| 69 | 25 | dem | den |
| 73 | 16 | 1,51 | 15,1 |
| 74 | 23 | $x^n$. | $x^n$ |
| 76 | 3 | 2b | —b |
| 76 | 4 | 2b | b |
| 80 | 20 | i ſt | iſt |
| 80 | 27 | BI | PI |
| 82 | 6 | $p^2$ | $x^2$ |
| 99 | 12 | M | M′ |
| 117 | 1 u. 2. | Zoll | Schuh |
| 121 | 21 | die | der |
| 123 | 24 | LG | LS |
| 127 | 9 | worauf | worauf |
| 129 | 18 b. 27 | FI | TI |
| 141 | 10 | 1 | 4 |
| 141 | 12 | 2 | 8 |
| 143 | 5 | dere | dern |
| 143 | 16 | welche | welchen |
| 146 | 6 | werden | werde |
| 149 | 24 | einer Sekunde | einem Augenblicke |
| 150 | 14 | Bor | Ber |
| 156 | 1 | = | — |
| 156 | 14 | 8 | 16 |
| 161 | 29 | nnendliche | unendliche |
| 166 | 31 | Fließigen | fließigen |
| 167 | 17 | Fließigen | fließigen |
| 170 | 17 | R | R′ |
| 172 | 12 | MPM′ das | PMM′ das |
| 180 | 5 | 1228 | 1728 |
| 180 | 7 | 82,20 | 83,2 |
| 180 | 10 | 82 | 83 |

# Druckfehler.

| Seite | Zeile | Statt | Lies |
|---|---|---|---|
| 180 | 10 | 148718 | 201233 |
| 180 | 11 u. 12 | 091550 | 212473 |
| 180 | 12 | 41 | 44 |
| 190 | 9 | der | den |
| 192 | 13 | k | $k^2$ |
| 195 | 13 | o | a |
| 205 | 14 | $30 \times 2$ | 30,2 |
| 205 | 15 | — | $+0{,}73-$ |
| 234 | 32 | I | IC |
| 240 | 19 | AD | AB |
| 263 | 13 | $3V3$ | $3\sqrt{3}$ |
| 268 | 12 | vor | ver |
| 270 | 16 | ſo | ſie |
| 279 | 20 | 1000 | 10000 |
| 283 | 6 | 13 | 15 |
| 291 | 16 | des | das |
| 296 | 5 | die | der |
| 297 | 23 | oder | oder. |
| 303 | 14 | $\frac{x}{2}:$ | $\frac{x}{2}-$ |
| 304 | 9 | zu | 2u |
| 306 | 24 | vom | von |
| 310 | 28 | 111,2 | 111,3 |
| 327 | 4 | Buchbaumholz | Buxbaumholz |
| 337 | 3 | läuglichte | länglichte |
| 337 | 19 | daß | Daß |

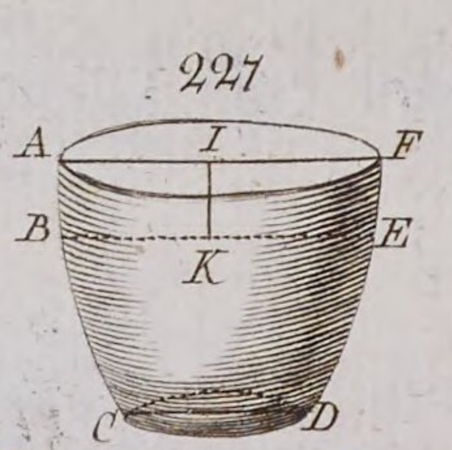
Kern-Kerrl'sche
Stiftungsbibliothek
Augsb

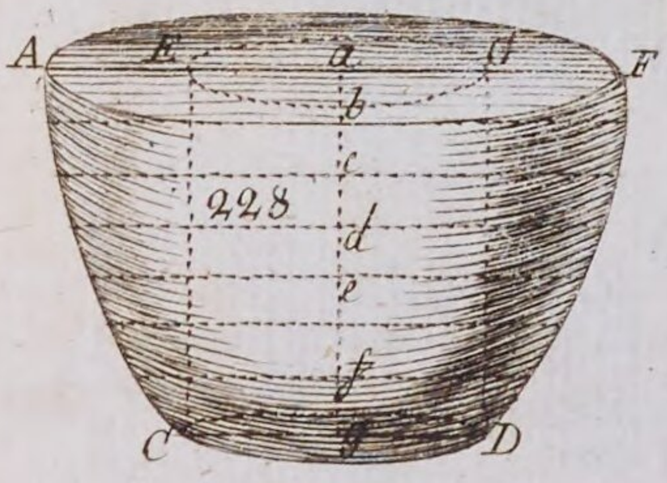

A
D
E
223
F
B
C

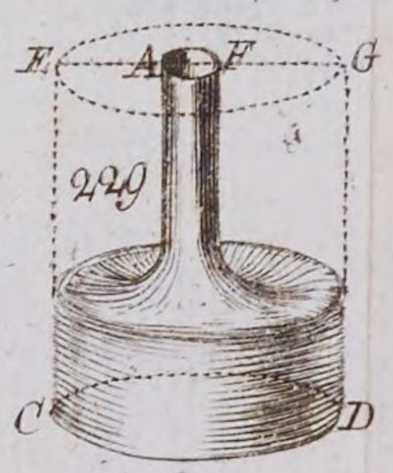

A
D
E
224
F
B
C

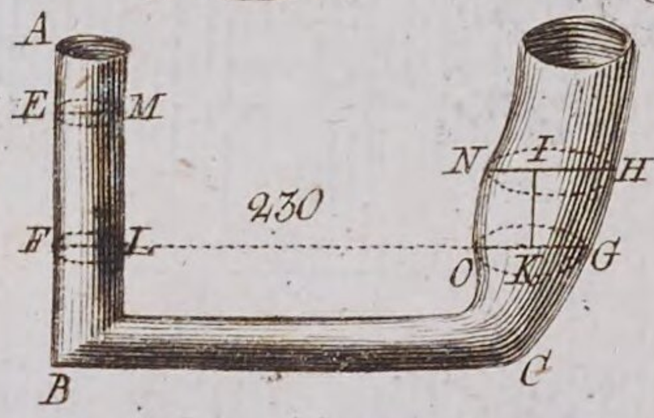
225
A
D
B
C

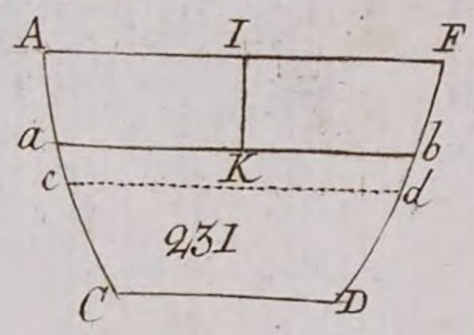
226
A
E
D
B
C

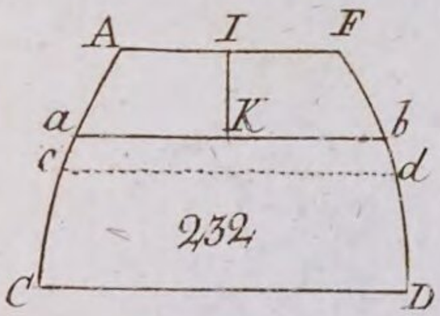

227
A
I
F
B
E
K
C
D

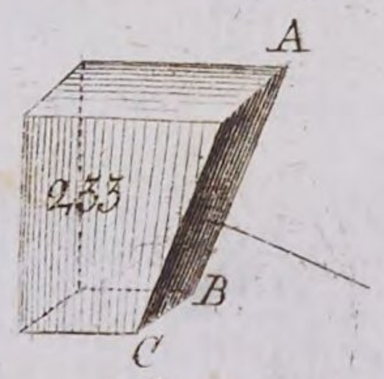

A
E
a
b
F
c
228
d
e
f
C
D

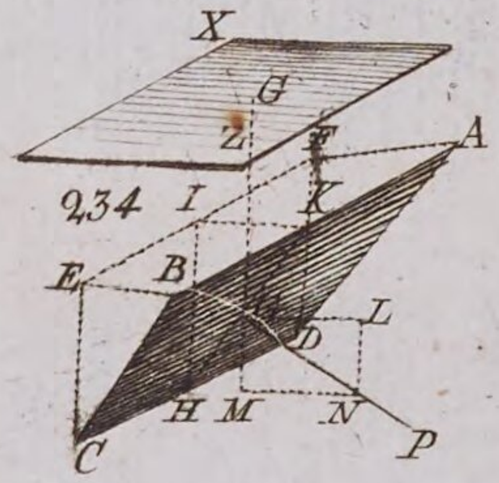

E
A
F
G
229
C
D

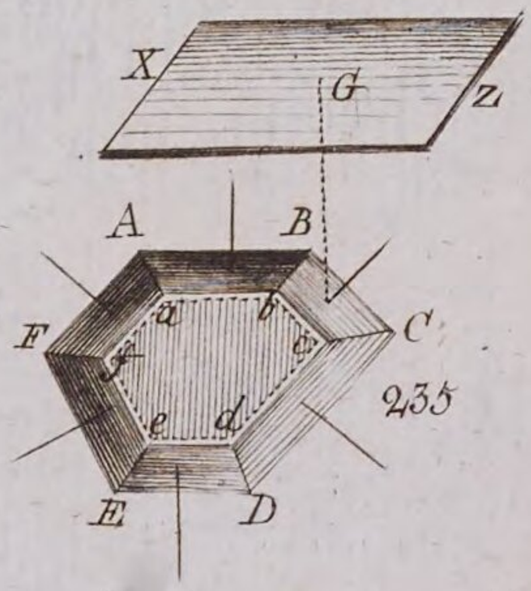

A
E
M
F
I
230
N
H
O
K
G
B
C

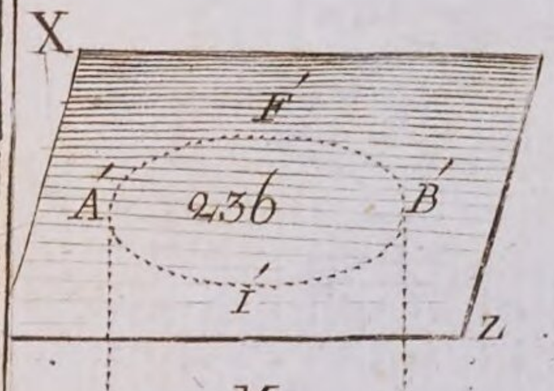

A
I
F
a
b
c
K
d
231
C
D

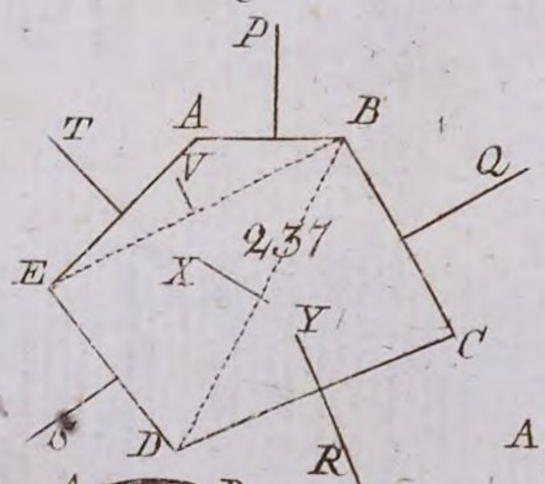

A
I
F
a
K
b
c
d
232
C
D

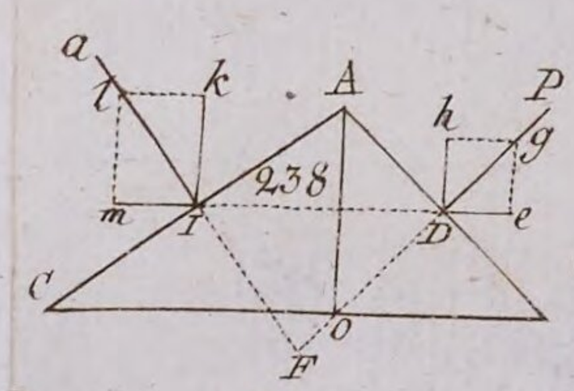

A
233
B
C

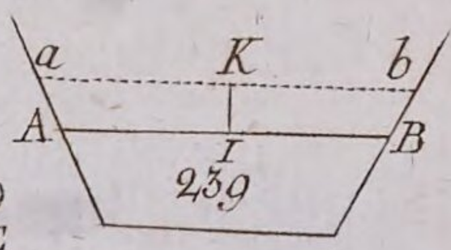

X
G
Z
F
A
234
I
K
E
B
D
L
C
H
M
N
P

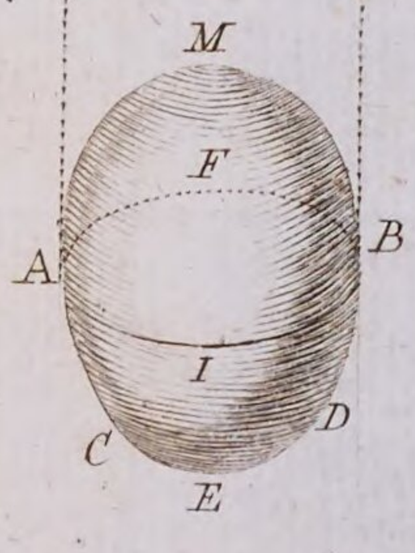

X
G
Z
A
B
F
a
b
C
235
e
d
E
D

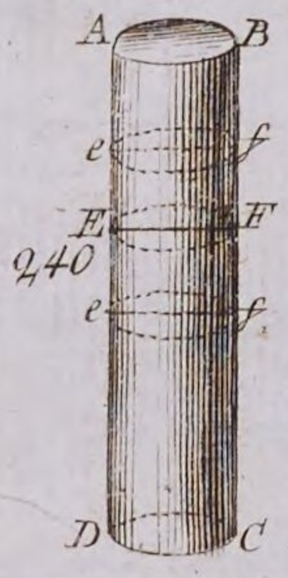

X
F
A
236
B
I
Z


P
T
A
B
Q
V
237
E
X
Y
C
S
D
R

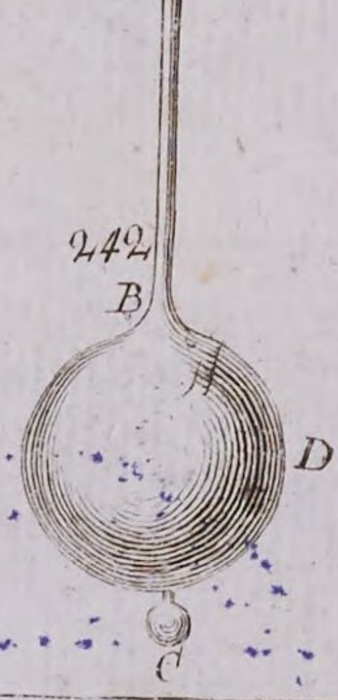

a
l
k
A
P
h
g
238
m
I
D
e
C
o
F

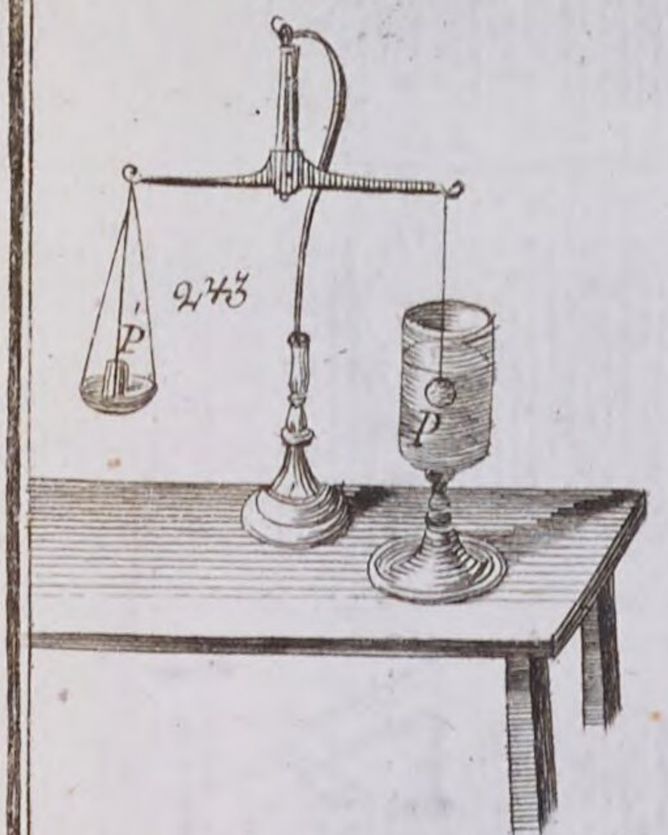

a
K
b
A
I
B
239

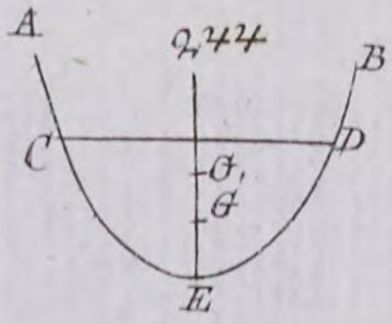

M
F
A
B
I
C
D
E

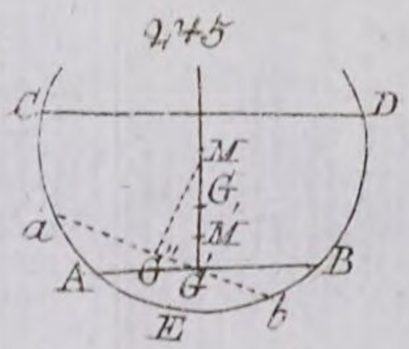

A
B
e
f
E
F
240
e
f
D
C

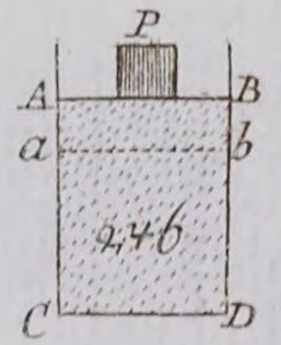
A
B
e
f
E
F
e
f
241
G
C
D
H
K
I

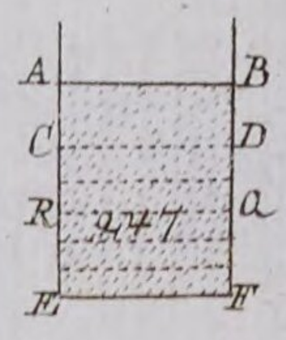

A.
E
242
B
D
C

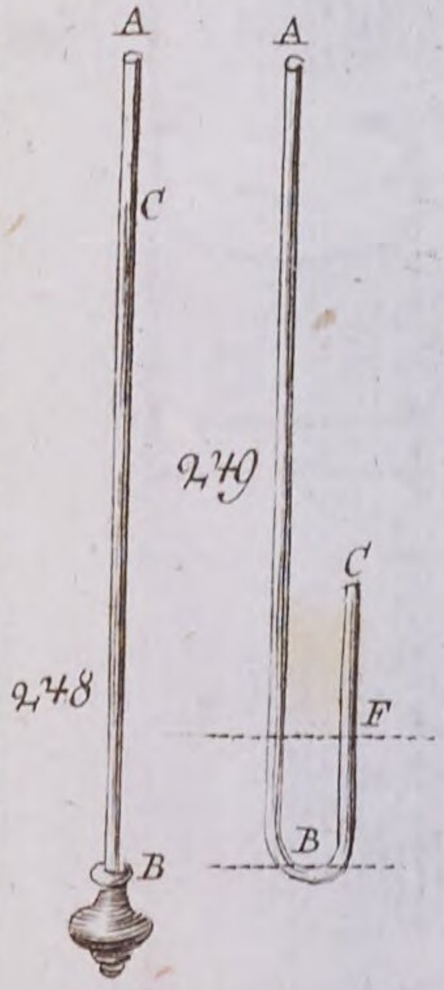

243
P
P

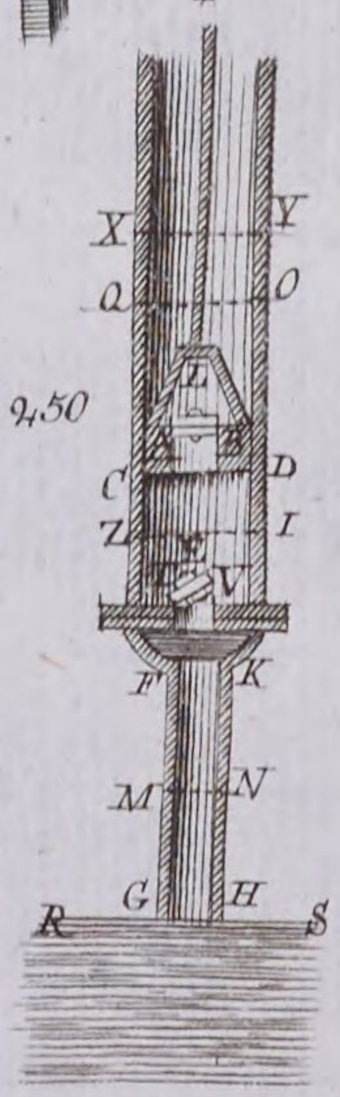

A
244
B
C
D
G,
G
E

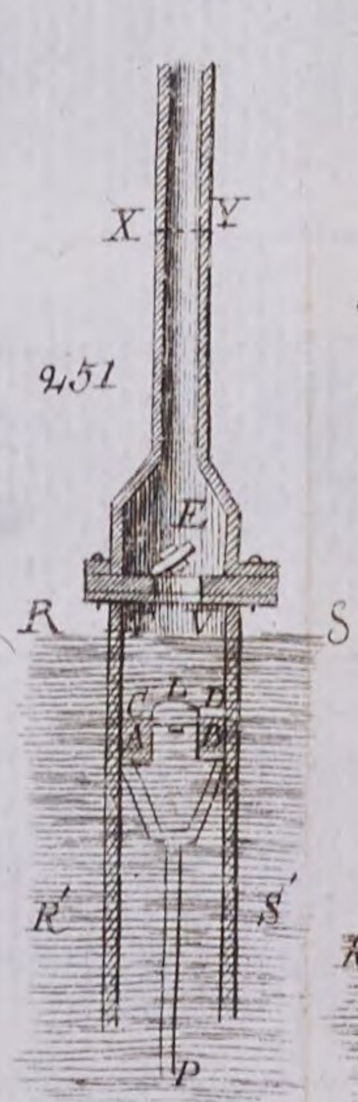

245
C
D
M
G,
M
a
A
G''
G
B
E
b

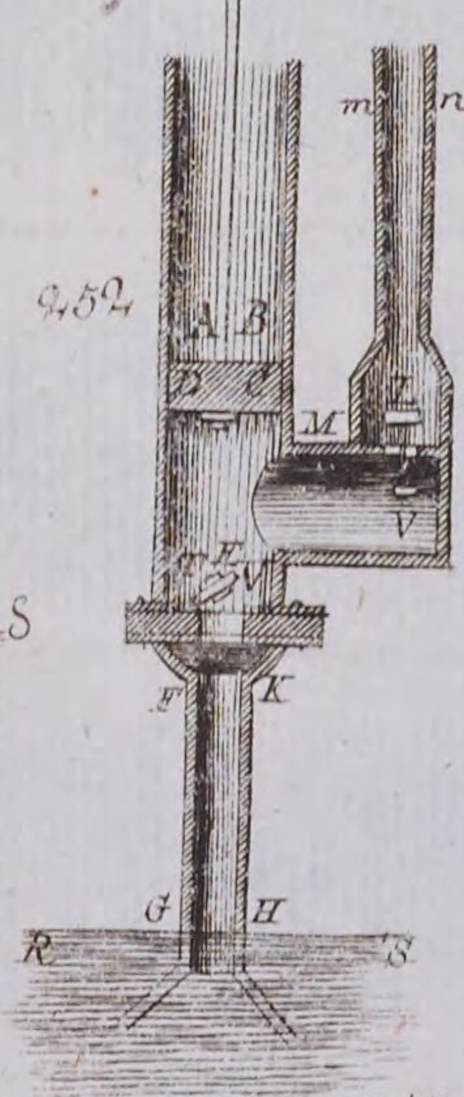

P
A
B
a
b
246
C
D

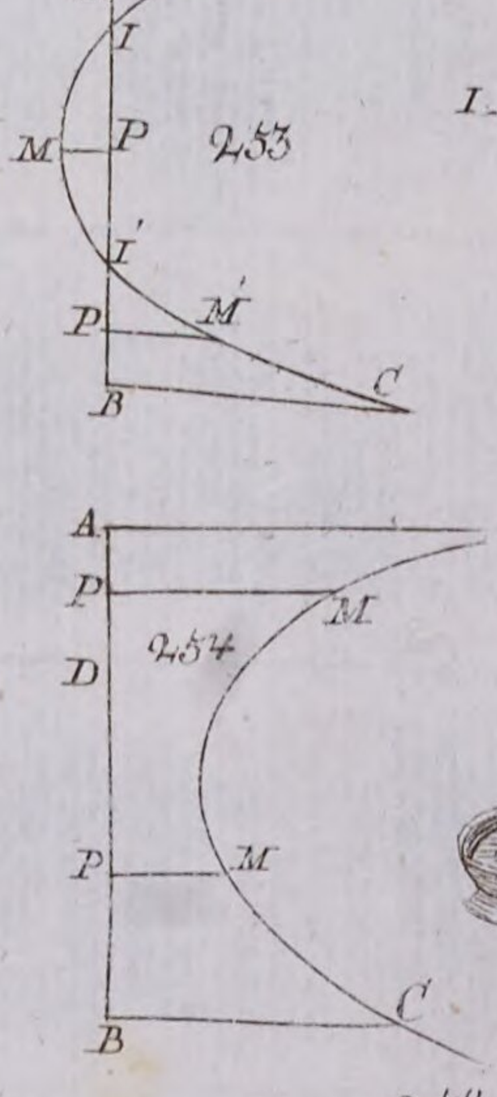

A
B
C
D
R
247
a
E
F


A
A
C
248
249
C
F
B
B

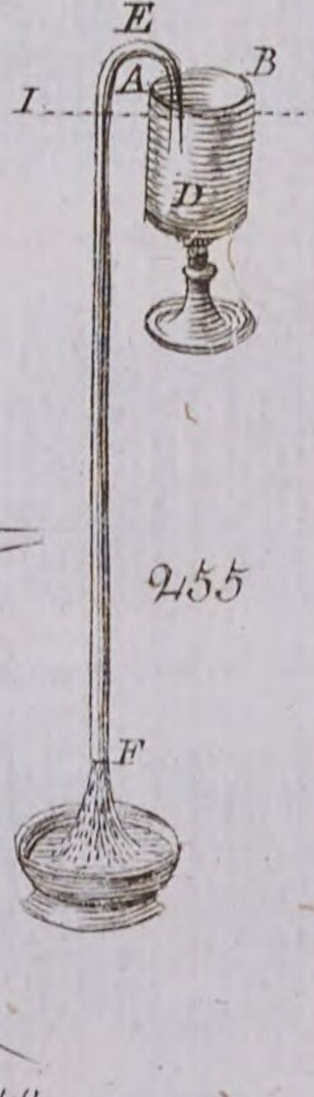

P
X
Y
Q
O
250
E
A
B
C
D
Z
I
V
F
K
M
N
G
H
R
S

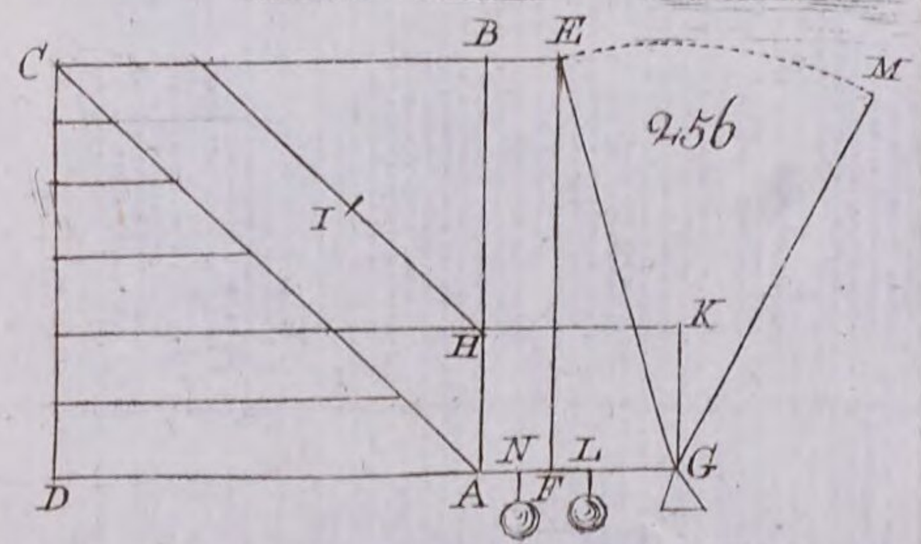

X
Y
251
E
R
V
S
C
D
A
B
M
N
G
H
R'
S'
P

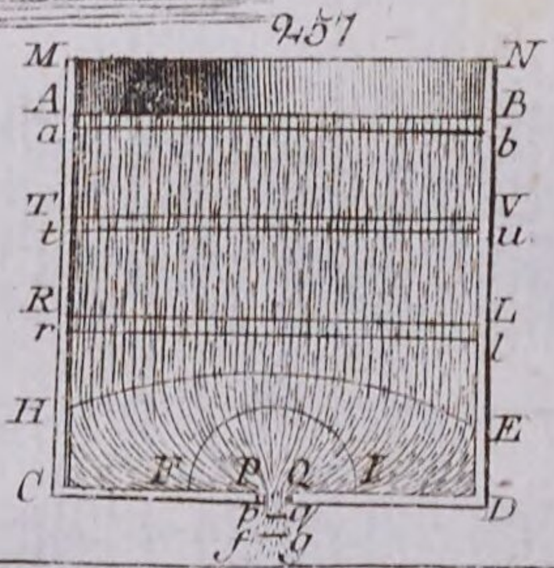

P
m
n
252
A
B
B
C
M
E
V
F
K
G
H
R
S

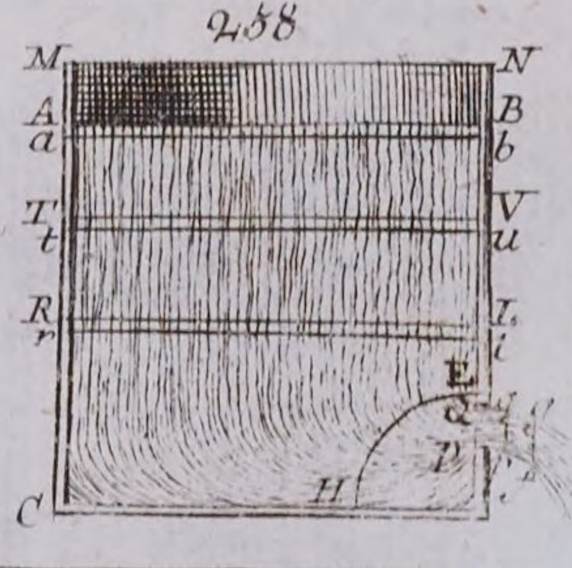

A
P
D
M
I
253
M
P
I'
M'
P
C
B


A
P
M
254
D
P
M
C
B

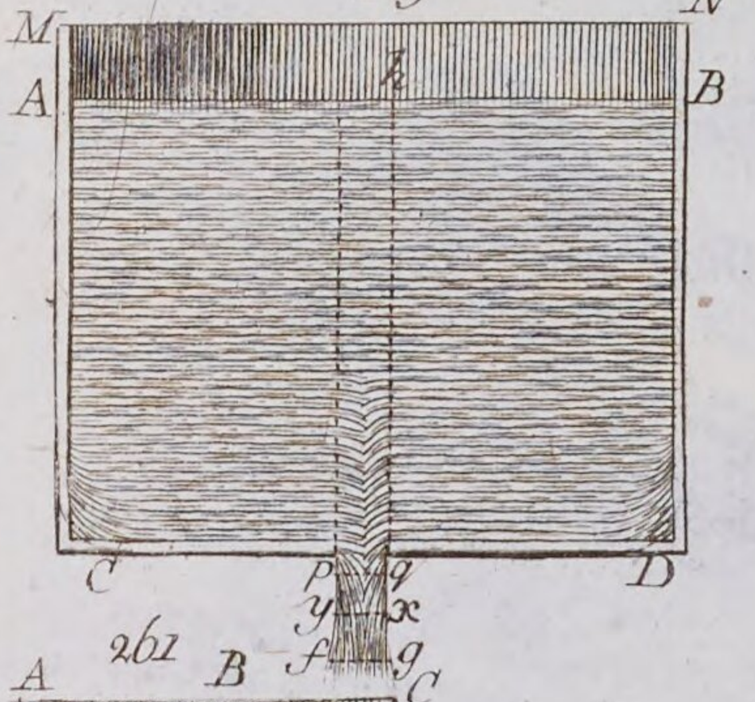

E
I
A
B
D
255
F


C
B
E
M
256
I
H
K
N
L
G
D
A
F

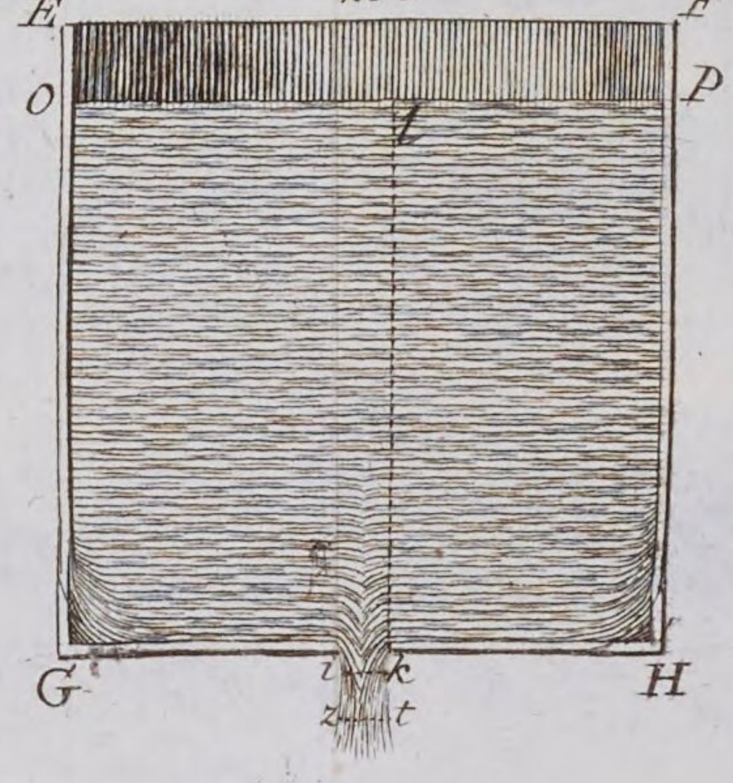

257
M
N
A
B
a
b
T
V
t
u
R
L
r
l
H
E
C
F
P
Q
I
D
p=a
f=b


258
M
N
A
B
a
b
T
V
t
u
R
L
r
i
E
Q
C
H
P

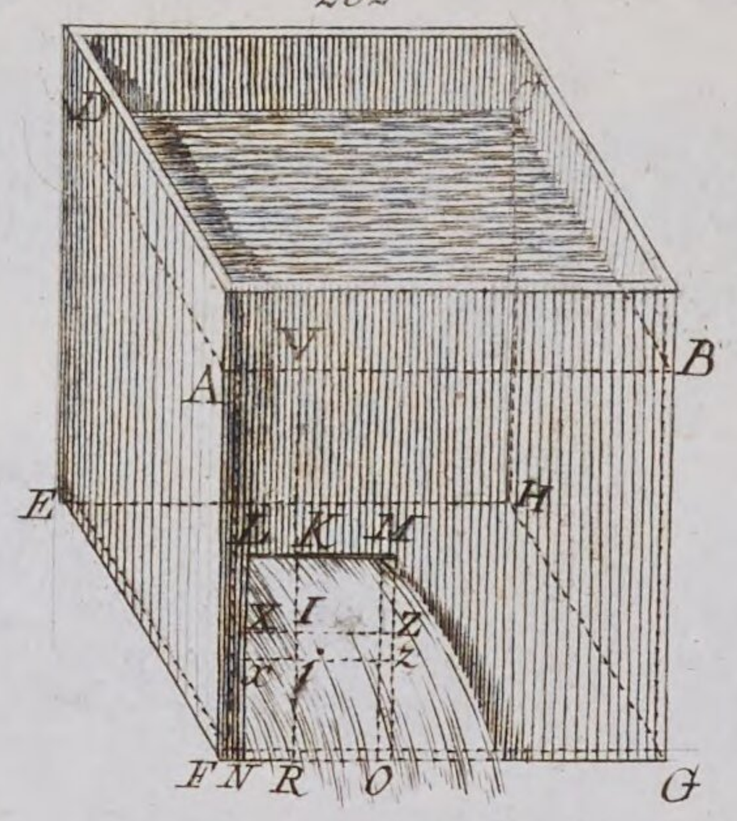
259



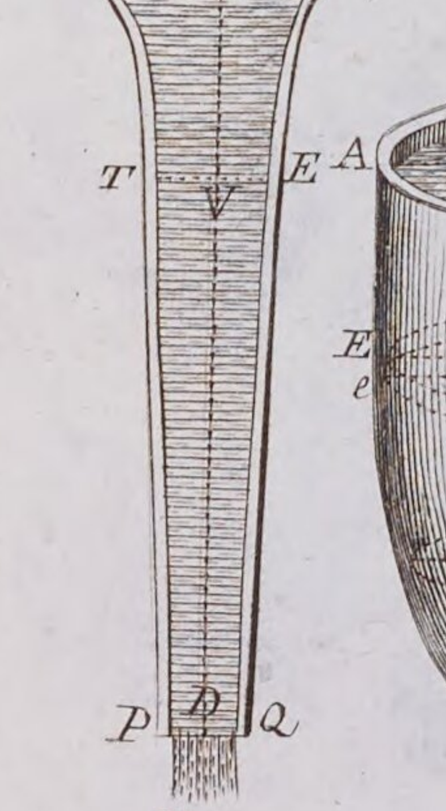

260



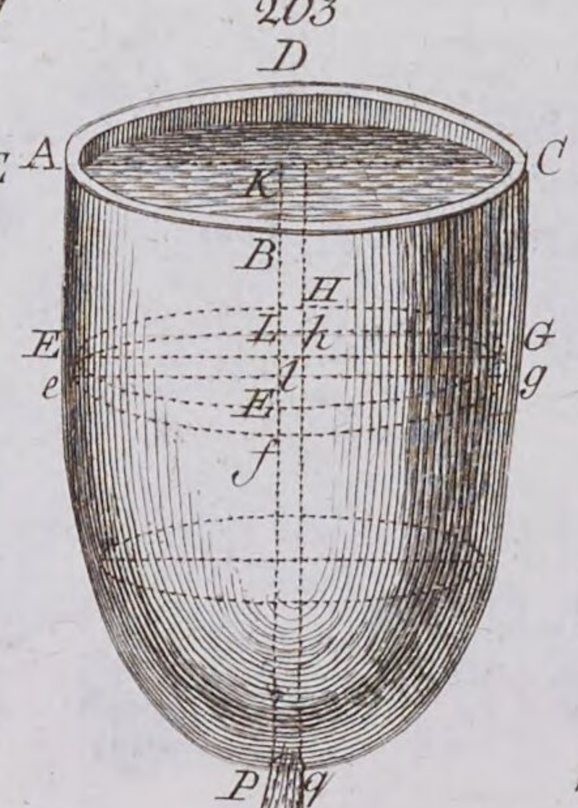

262



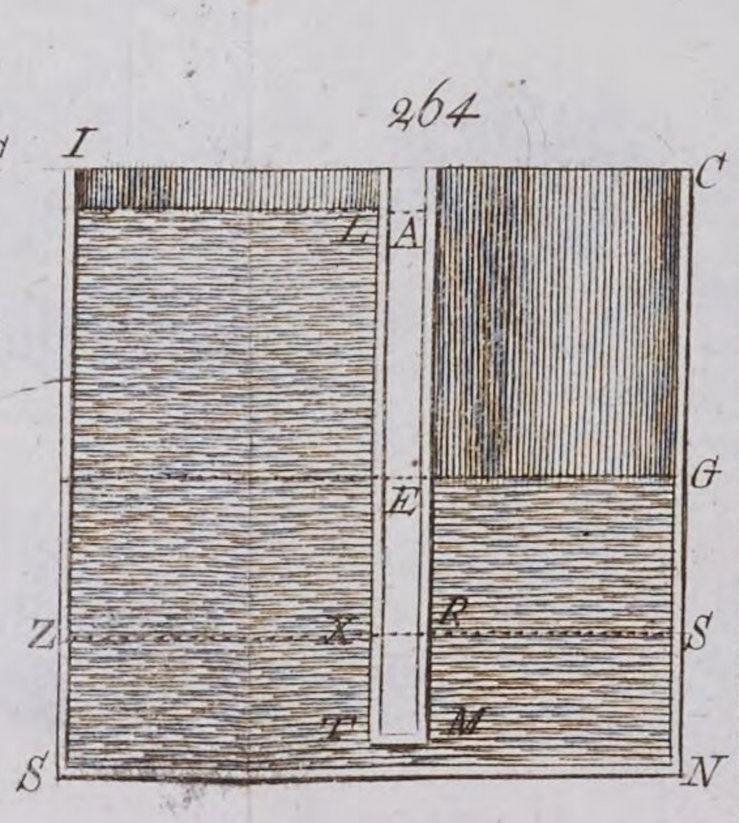

261



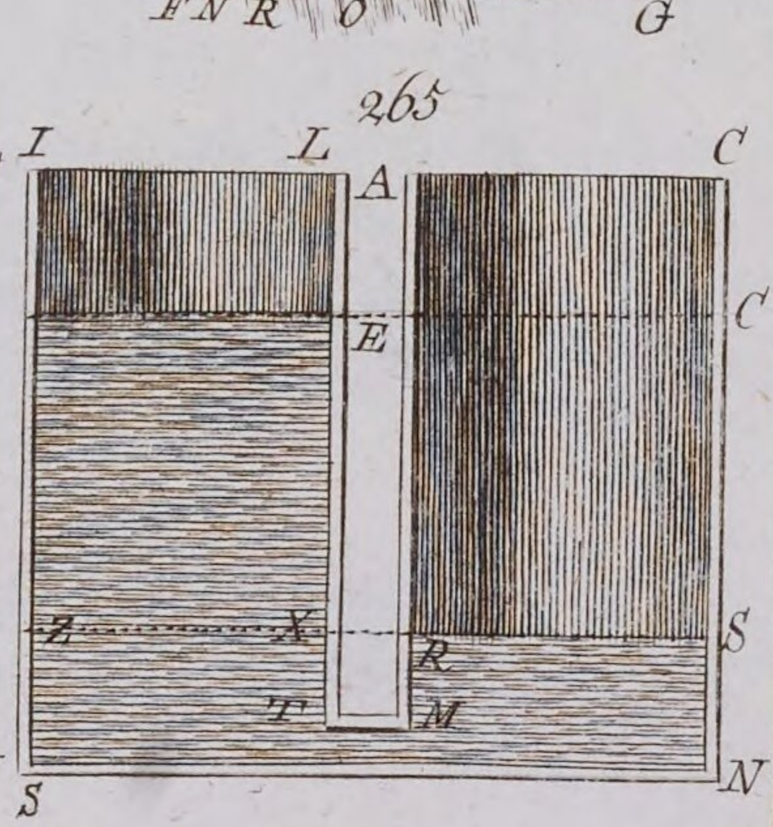

263



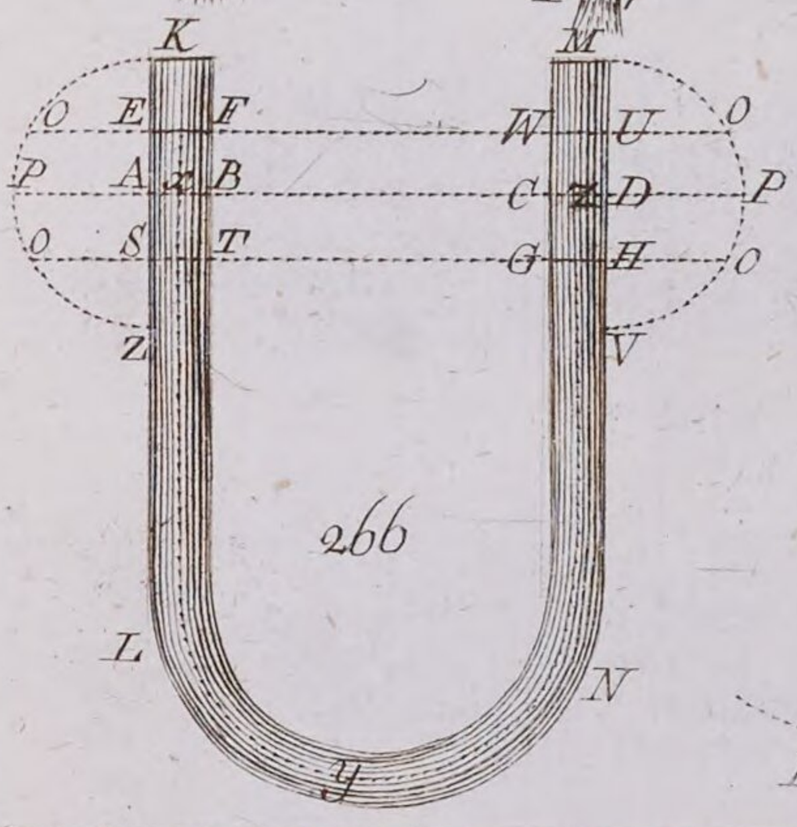

264




265

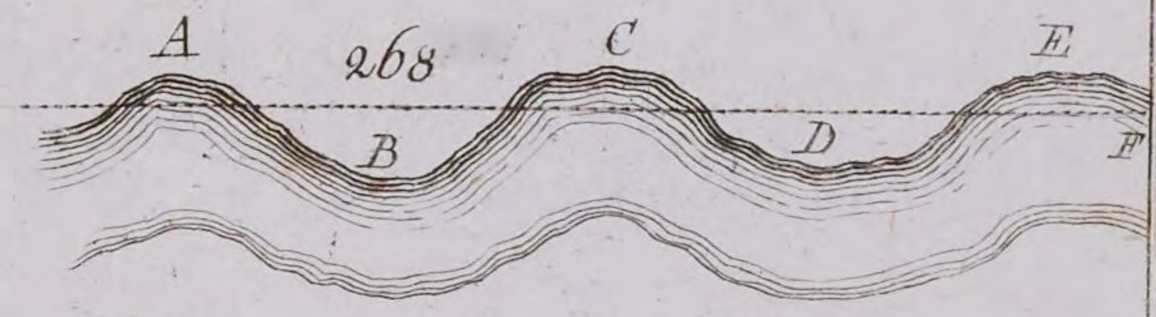



266

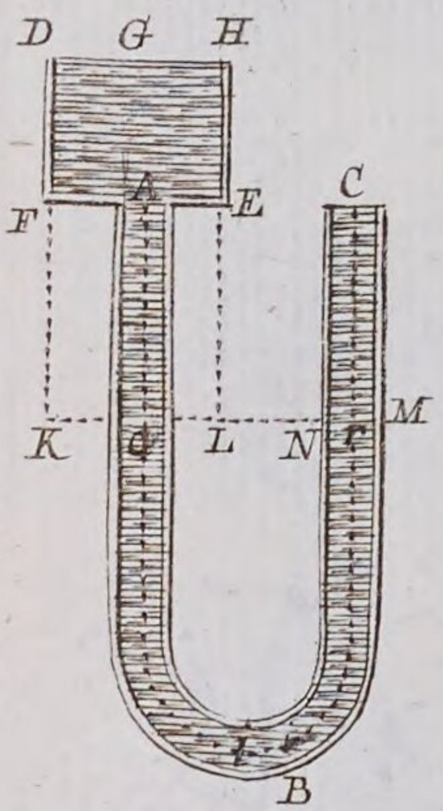



267

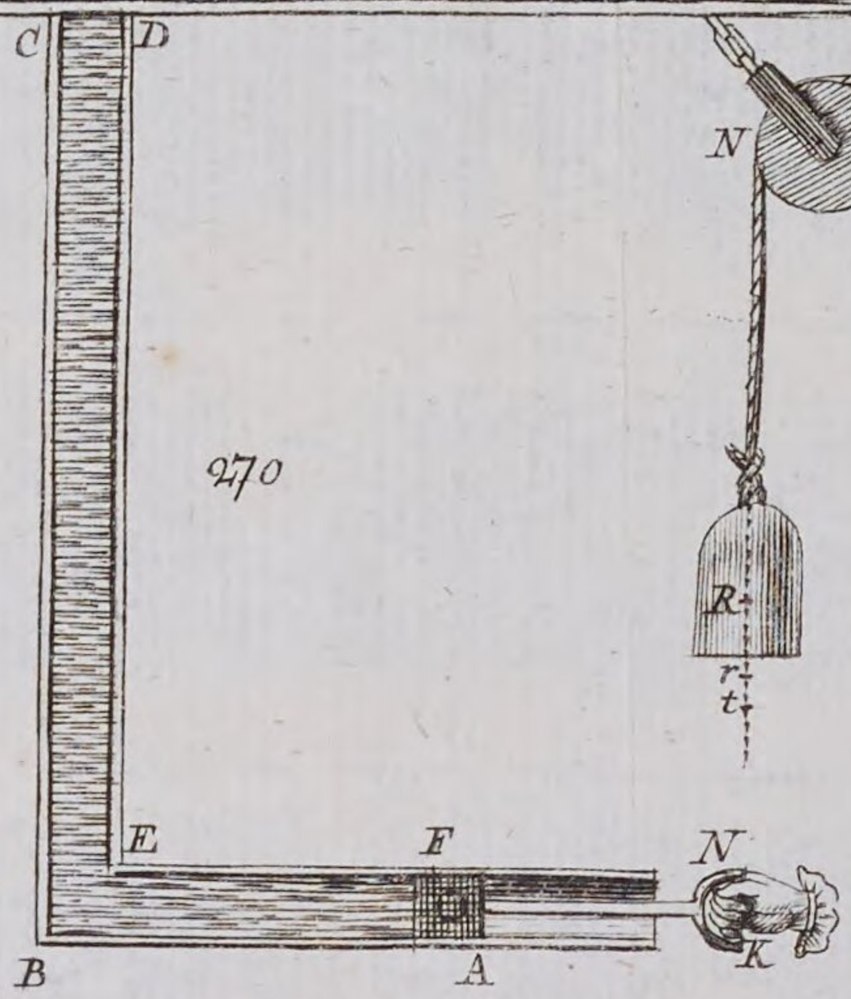
268



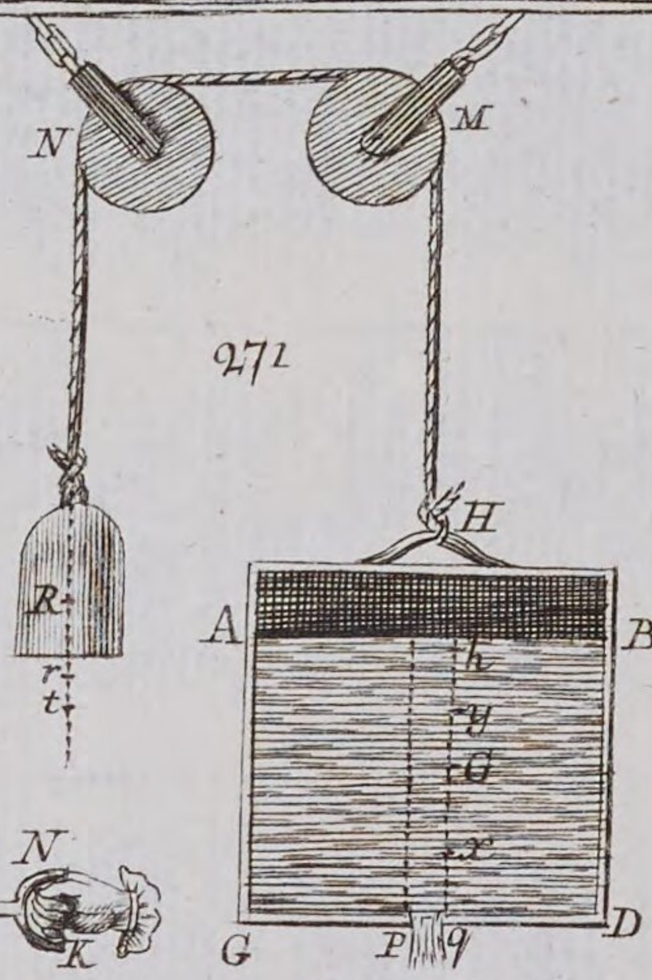
269



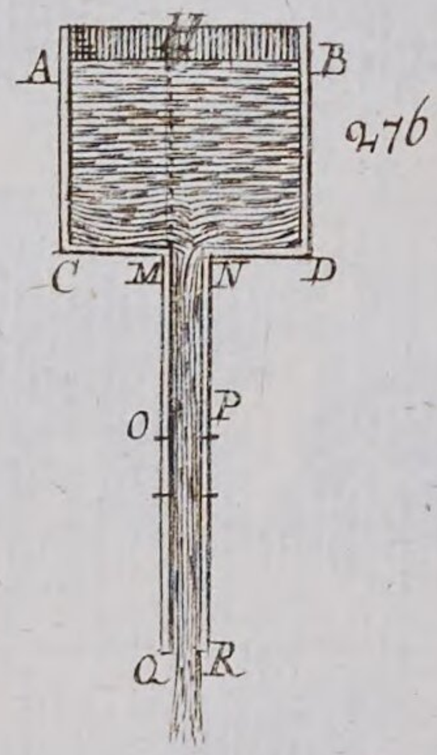

270



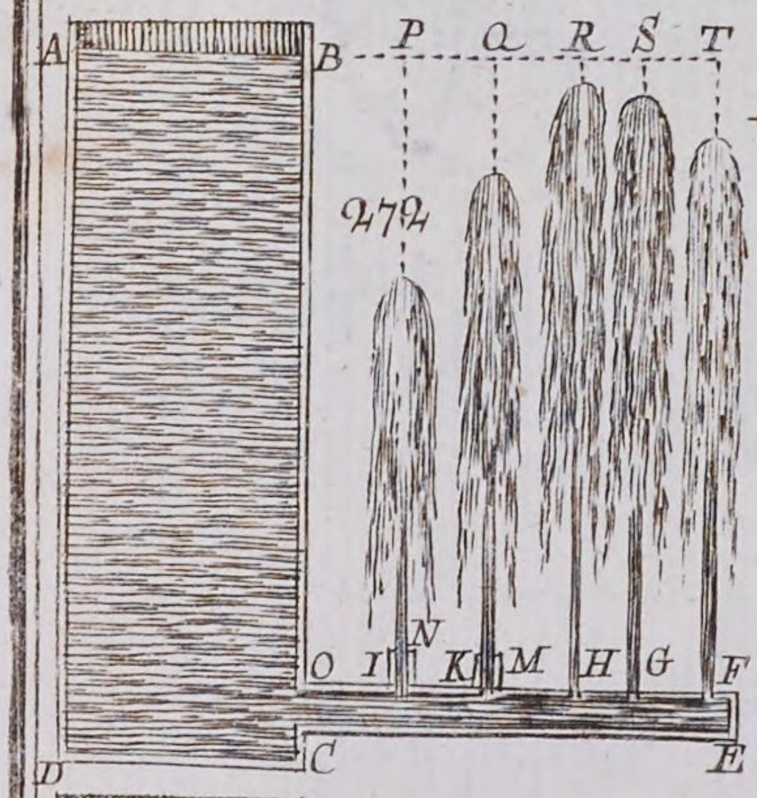

271



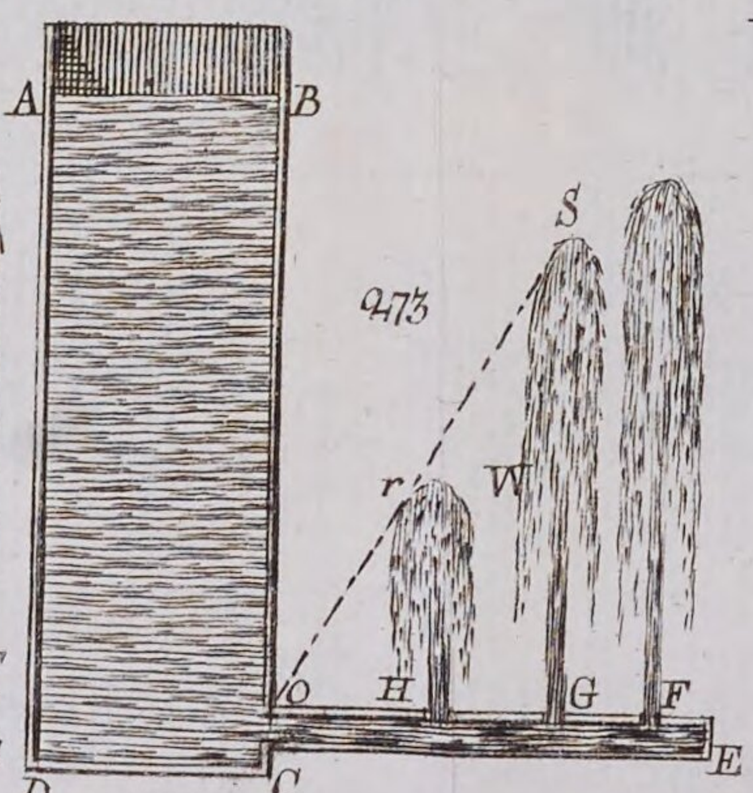

276



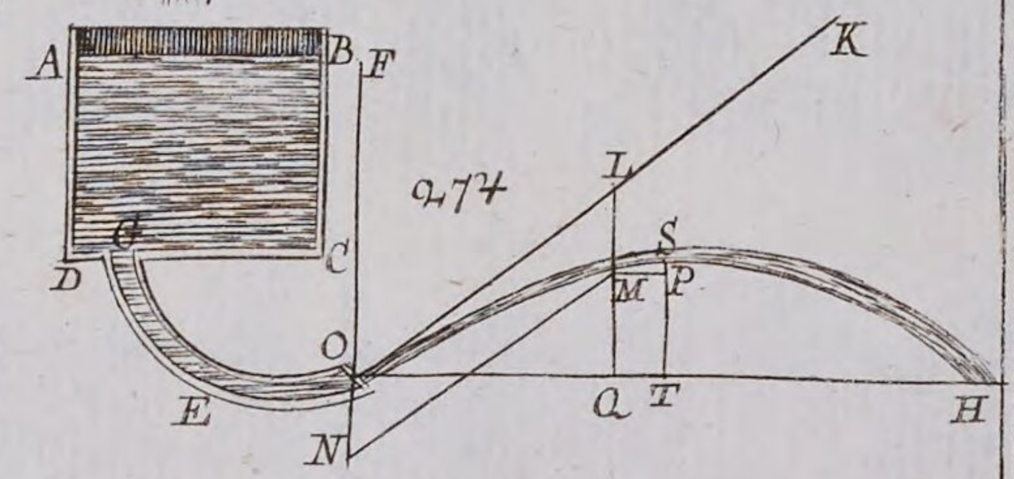

272



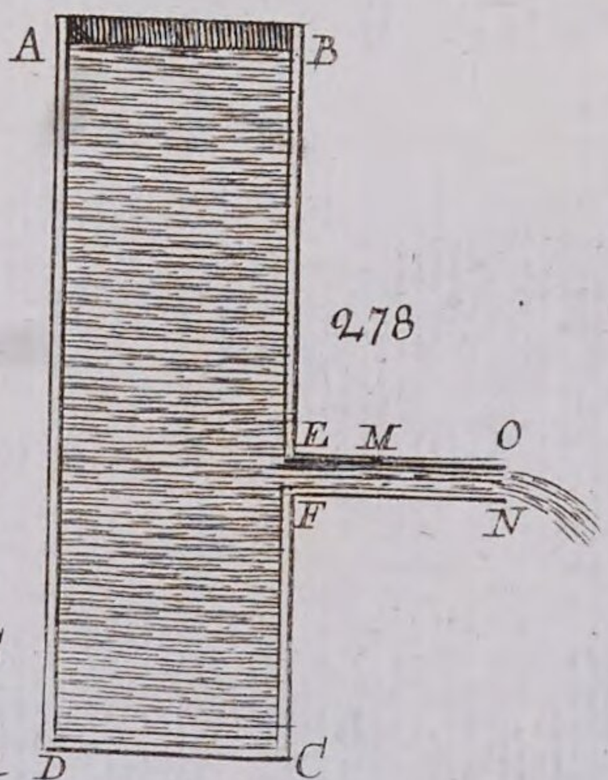

273



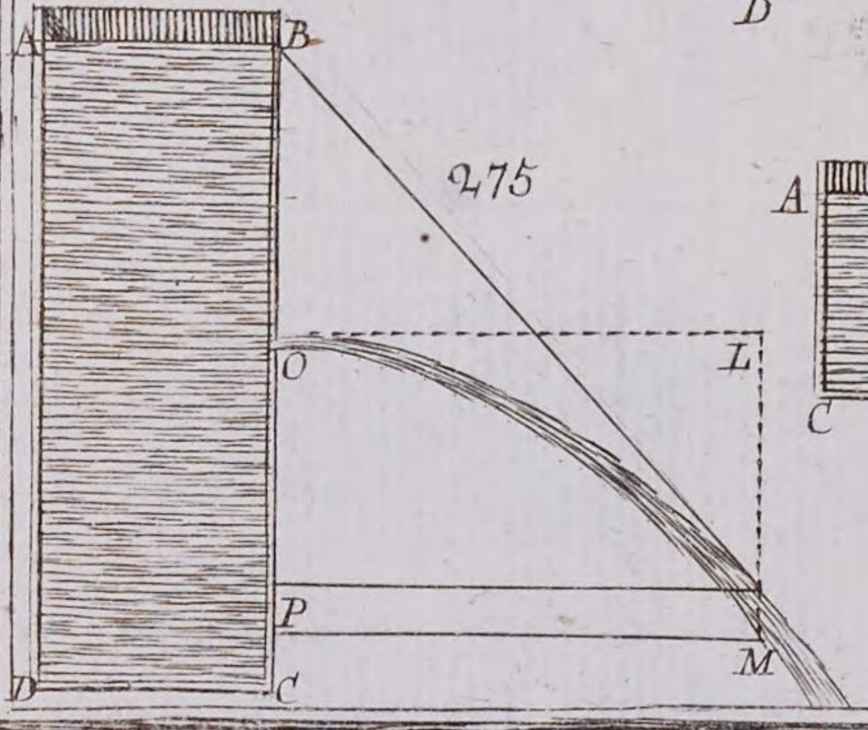

274



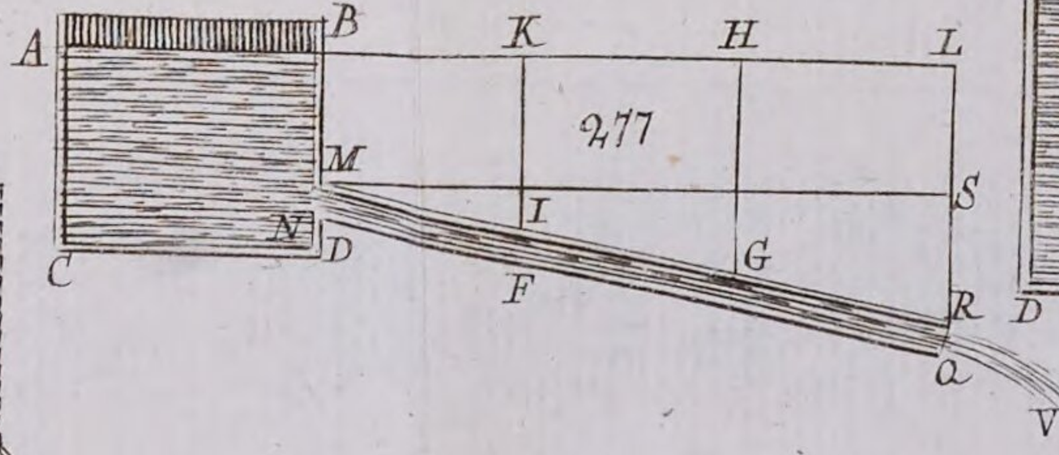

278



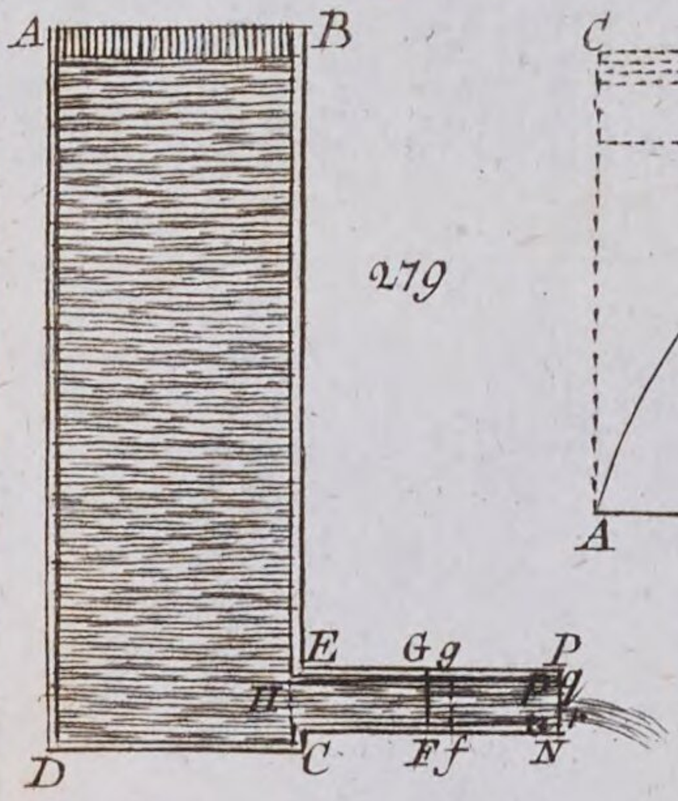

275



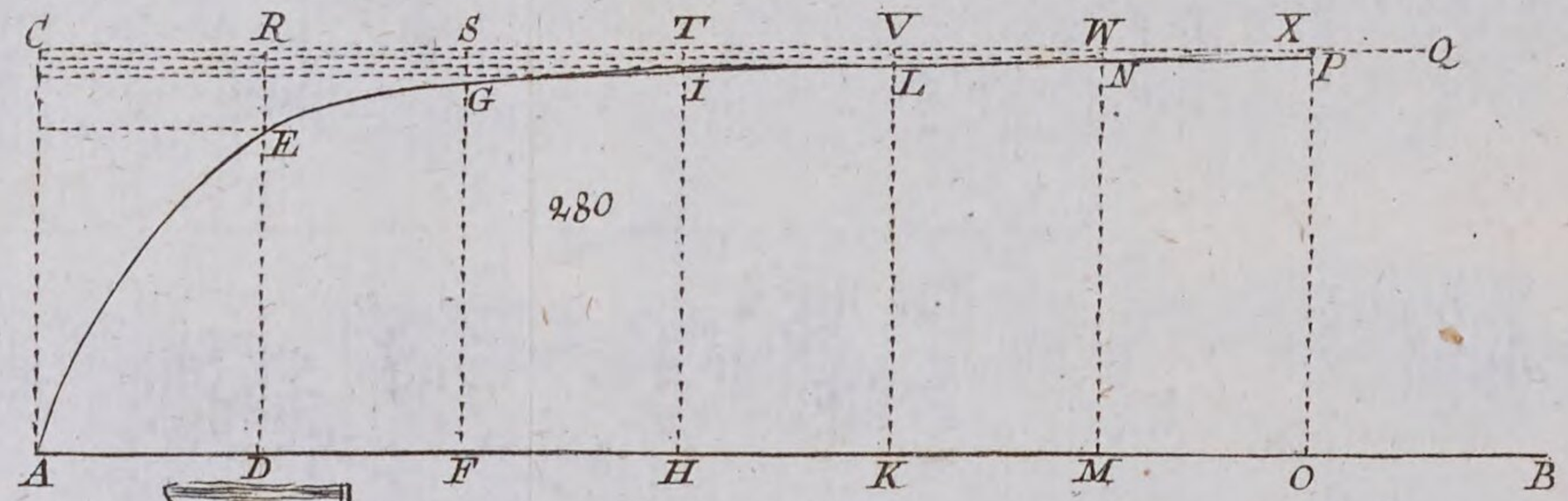

277



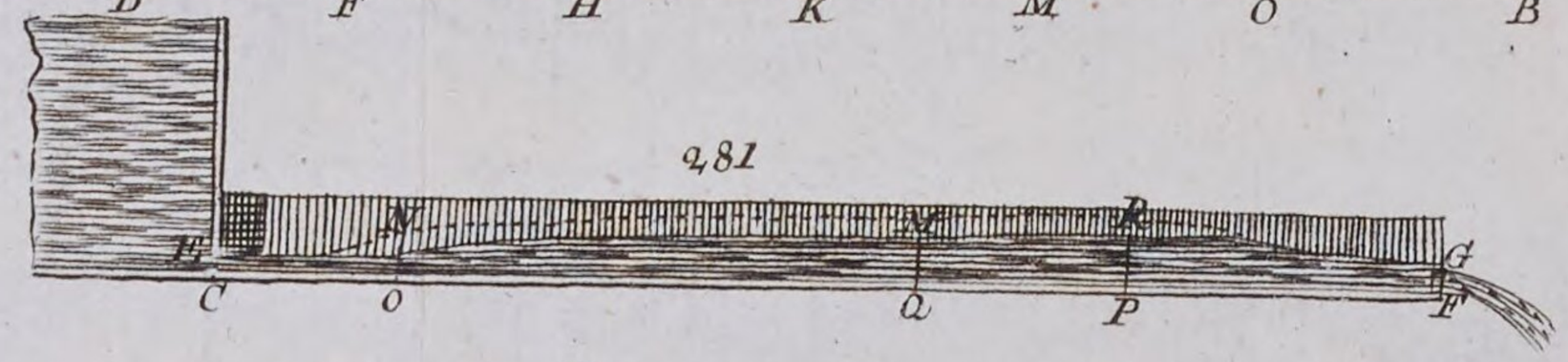
279



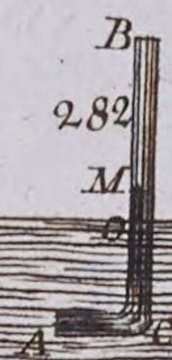

280



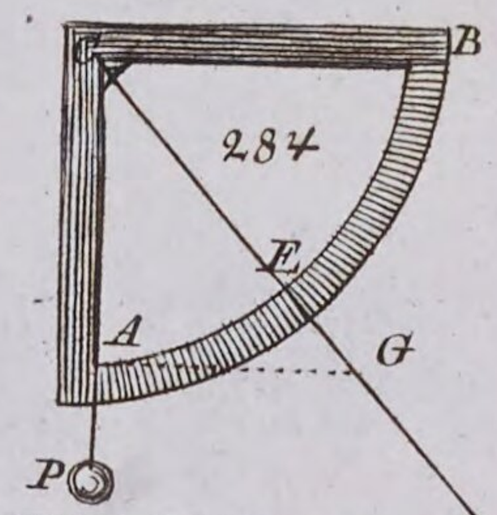

281



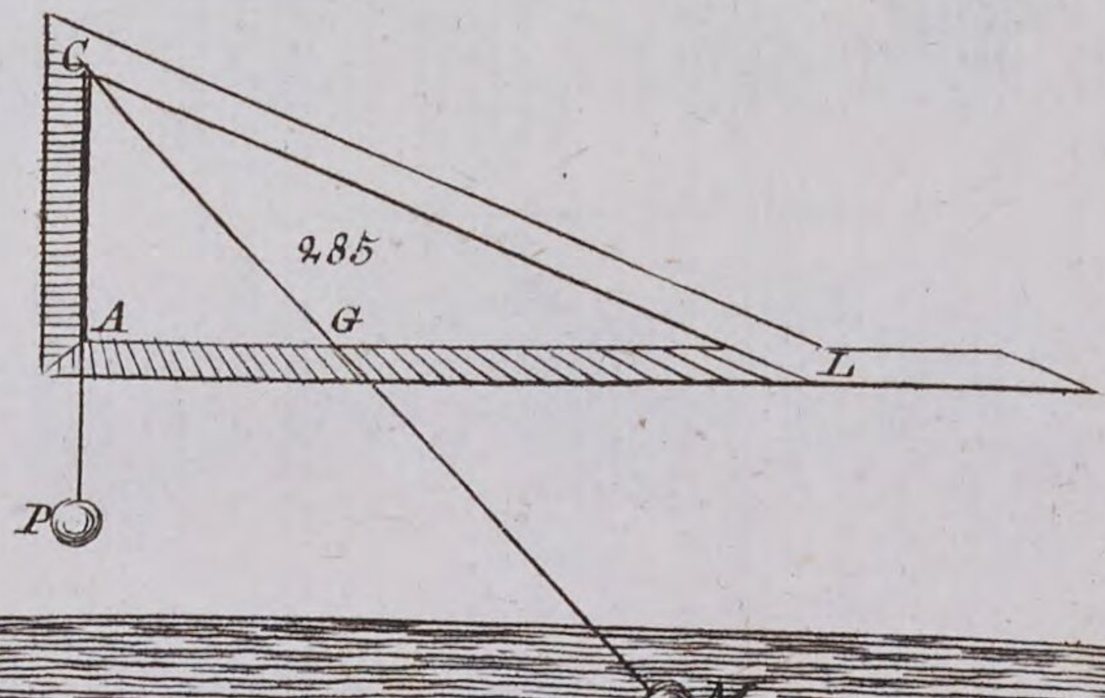

282



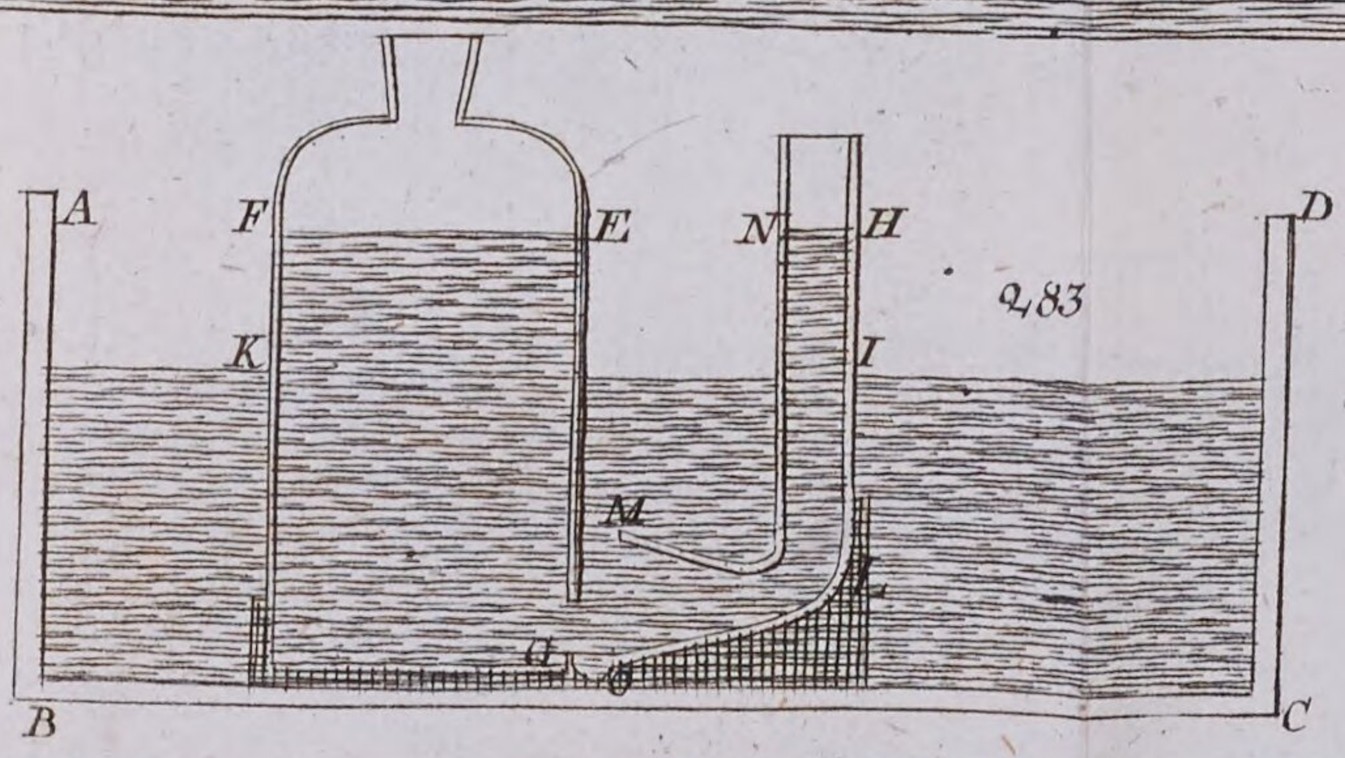

284



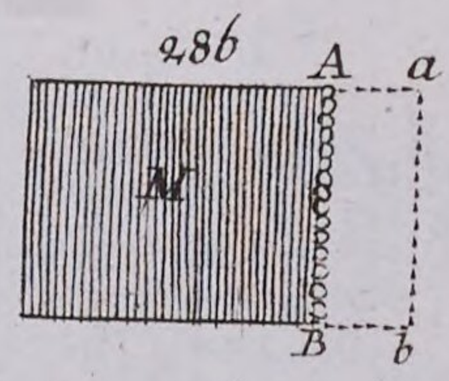

285



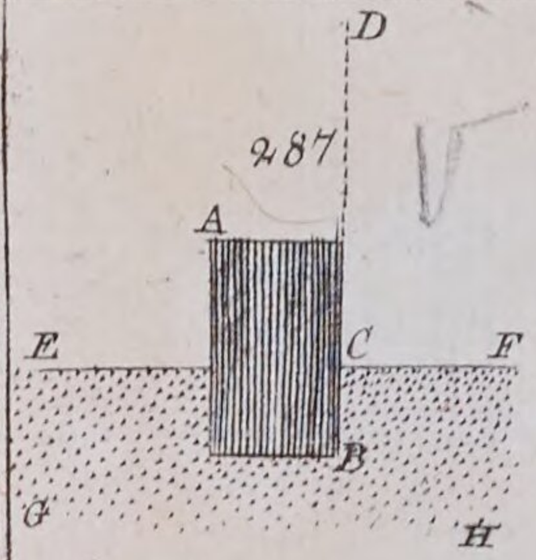

283



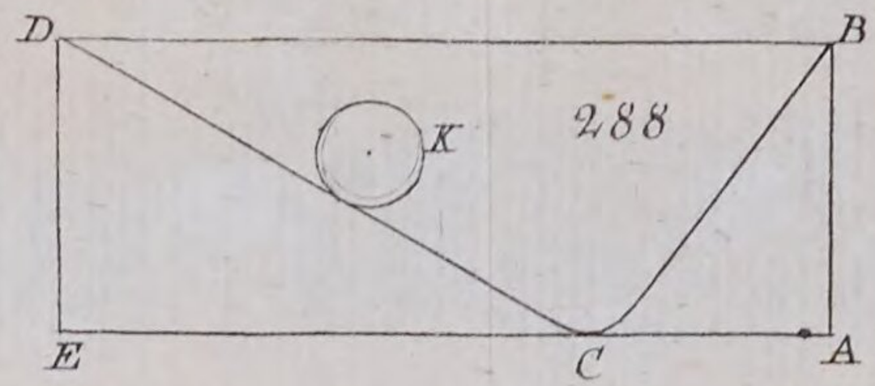

286



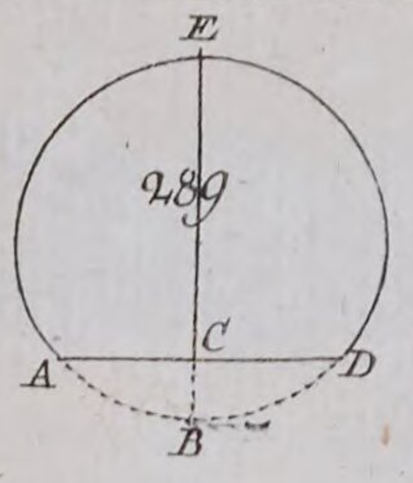
287



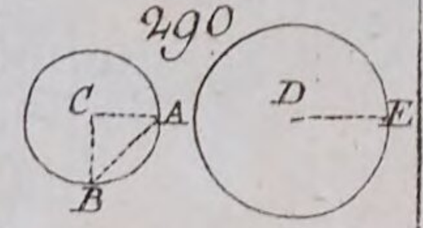

288



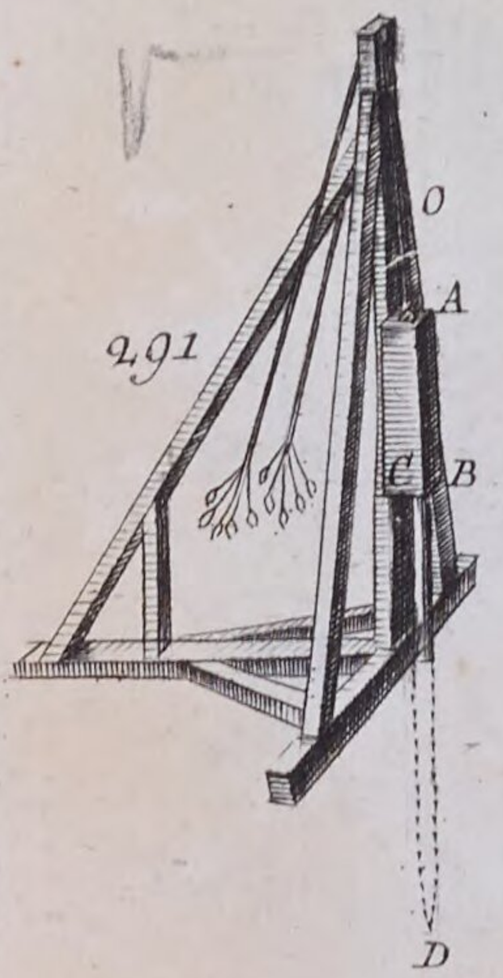

289



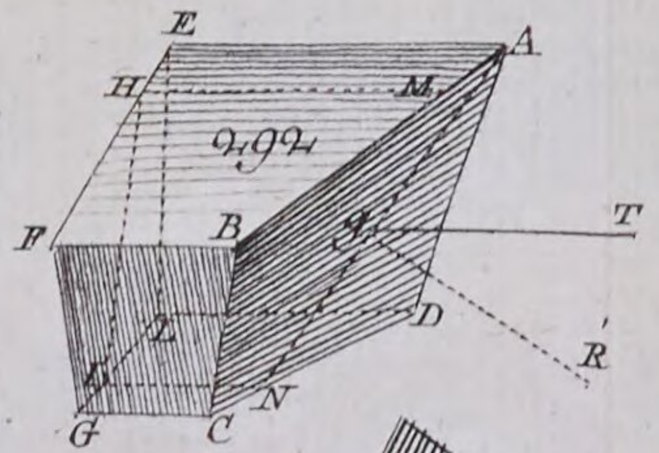

290



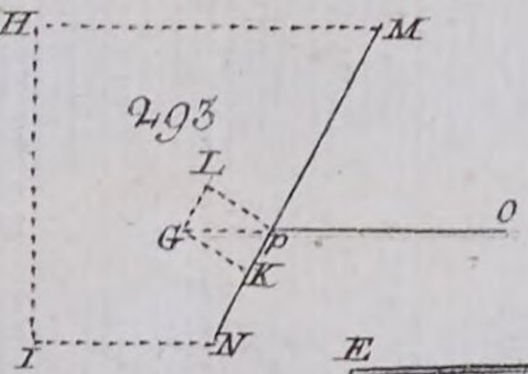

291



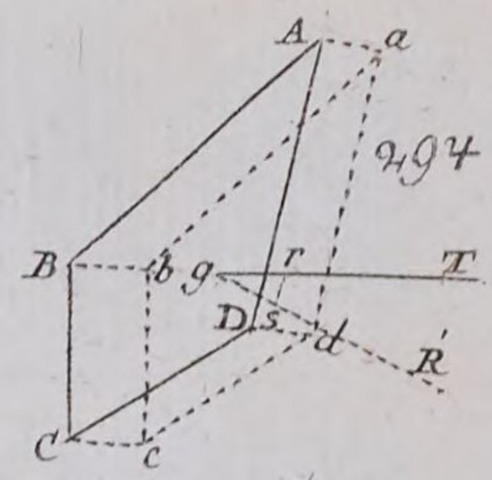

292



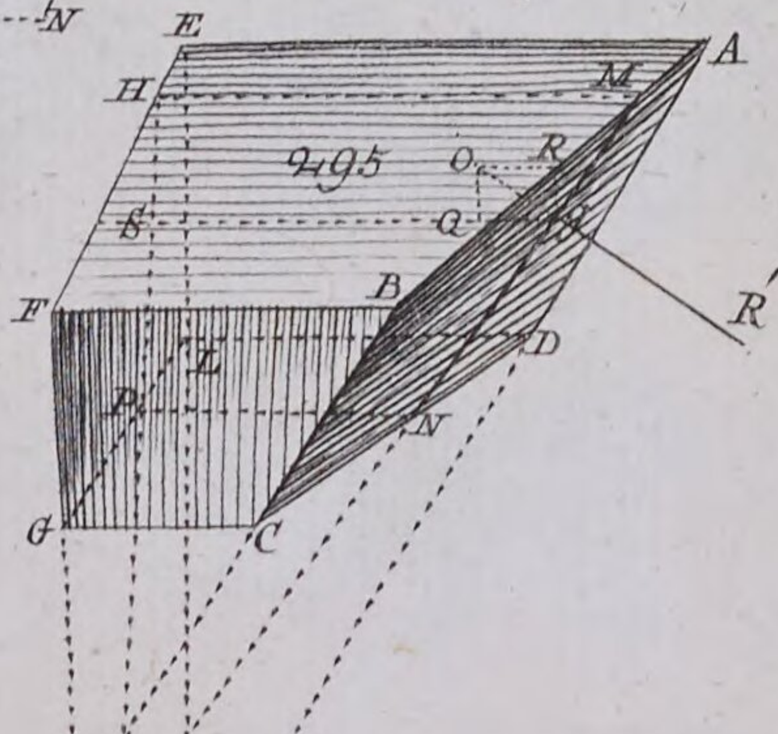

293



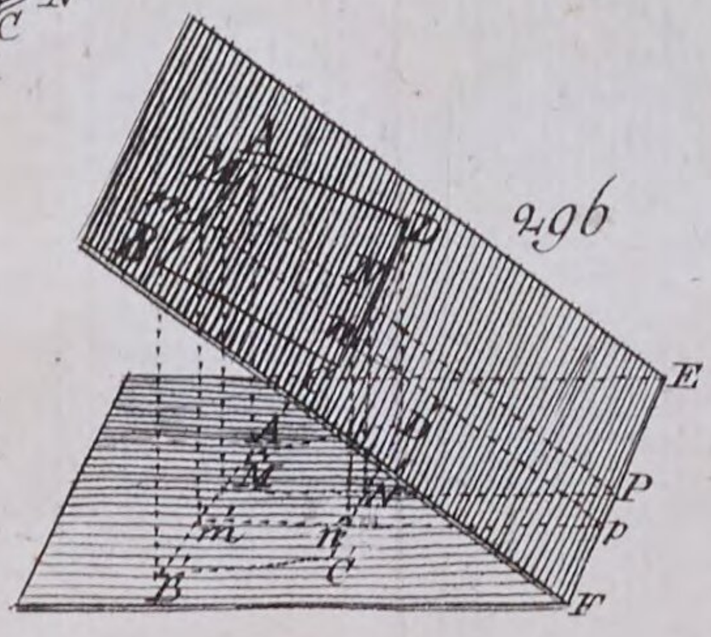

294



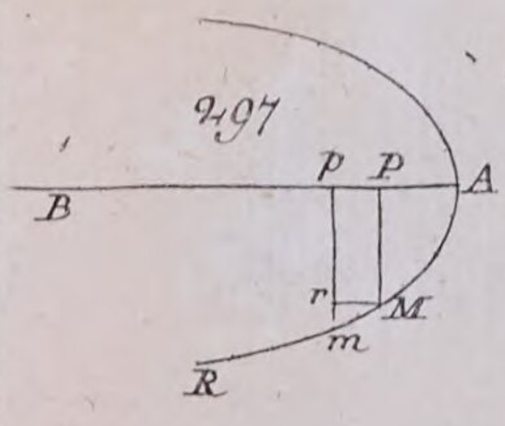

295



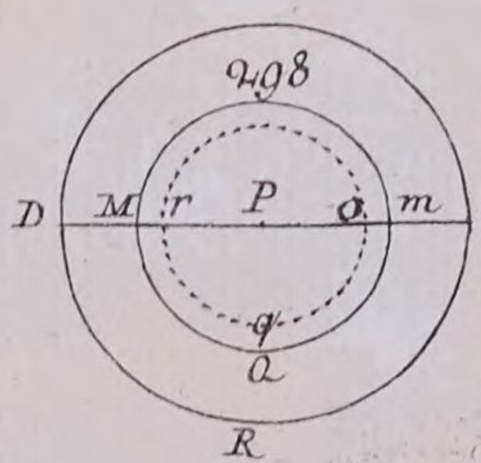

296



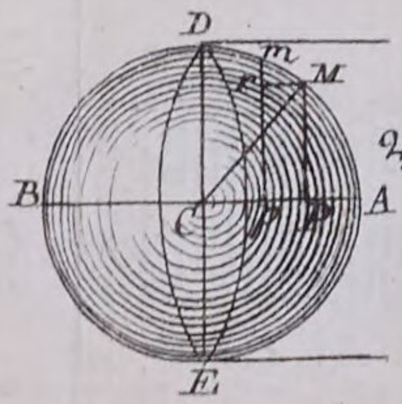

297



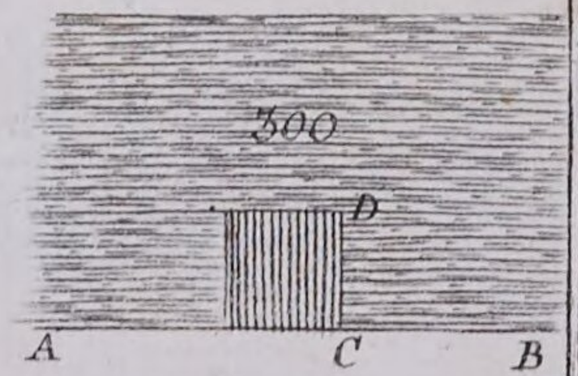

298



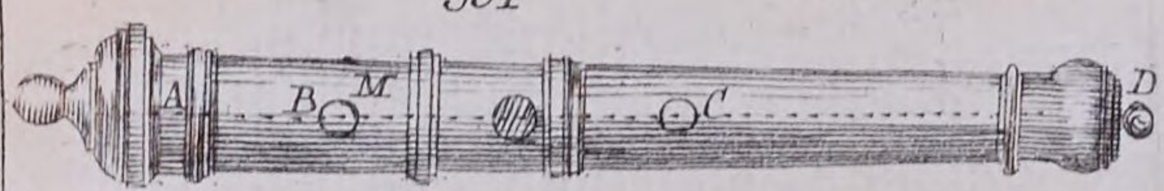

299



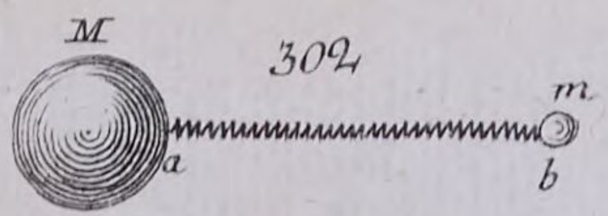

300



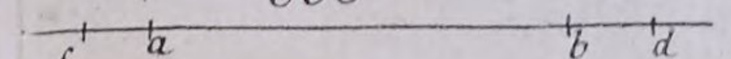

301



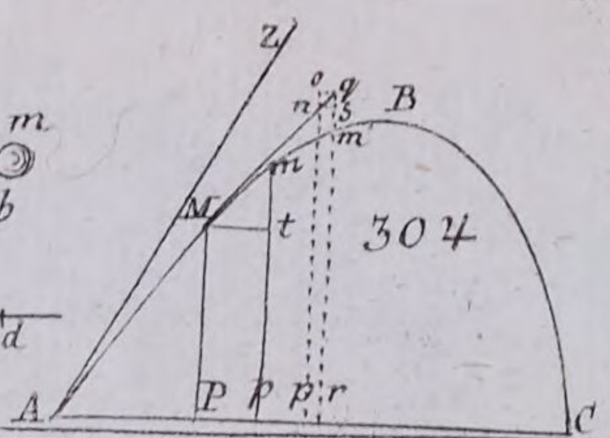

302



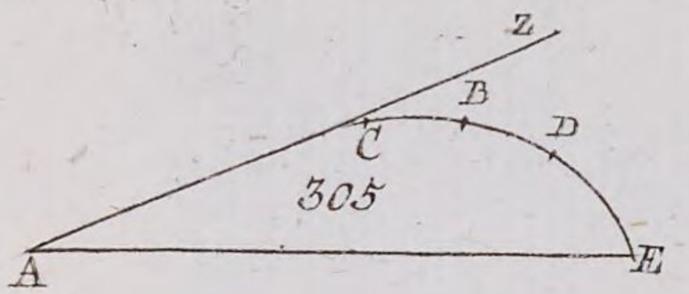

303



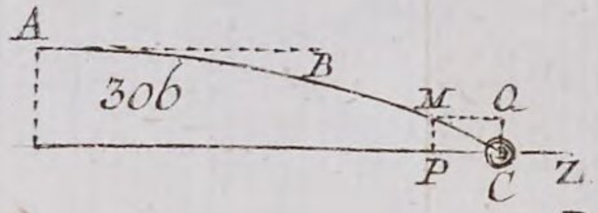

304



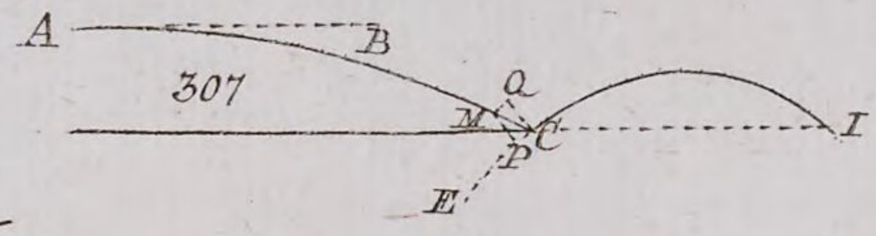
305



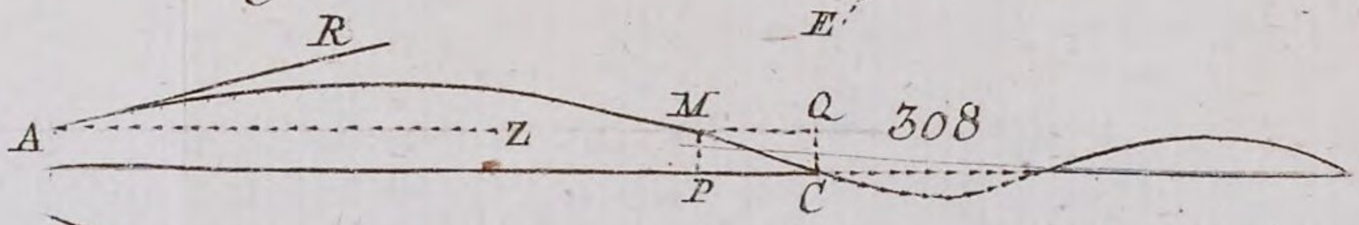

306



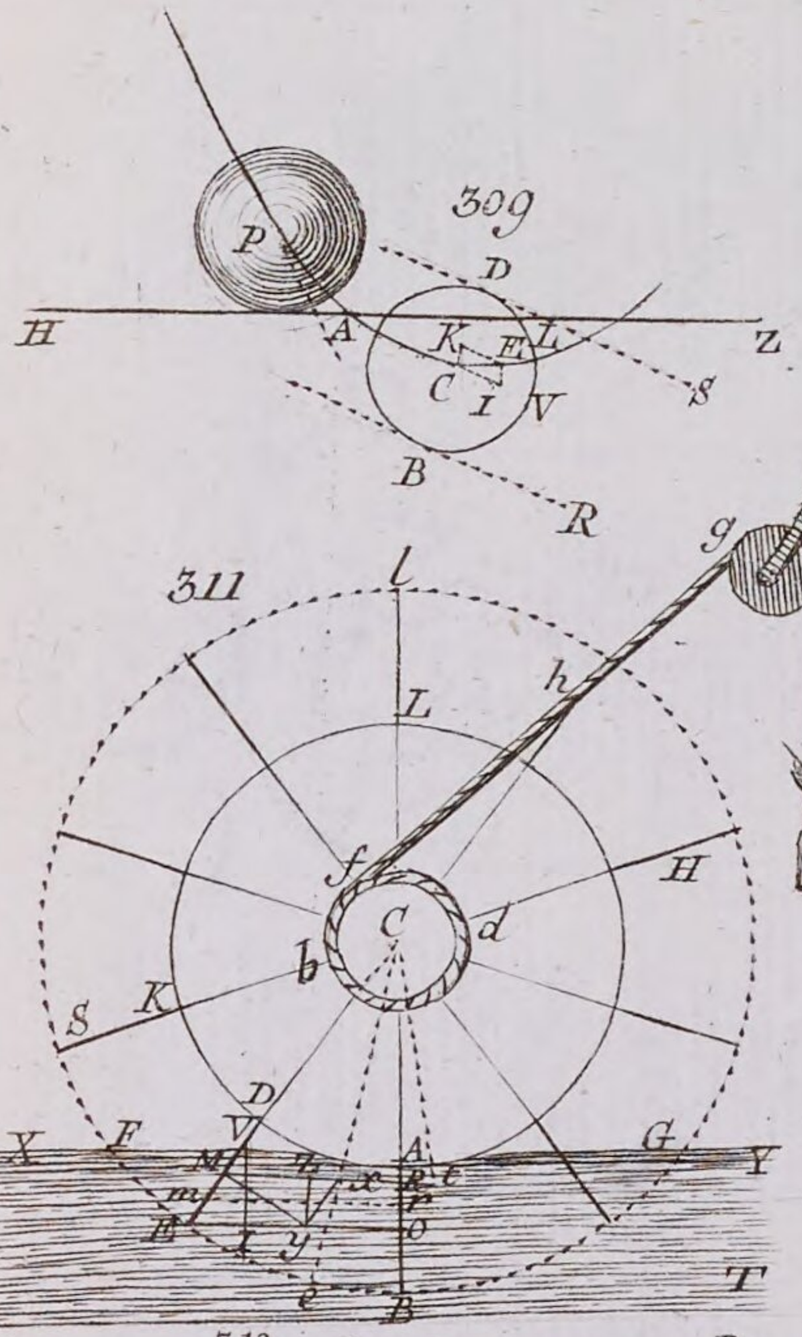

307



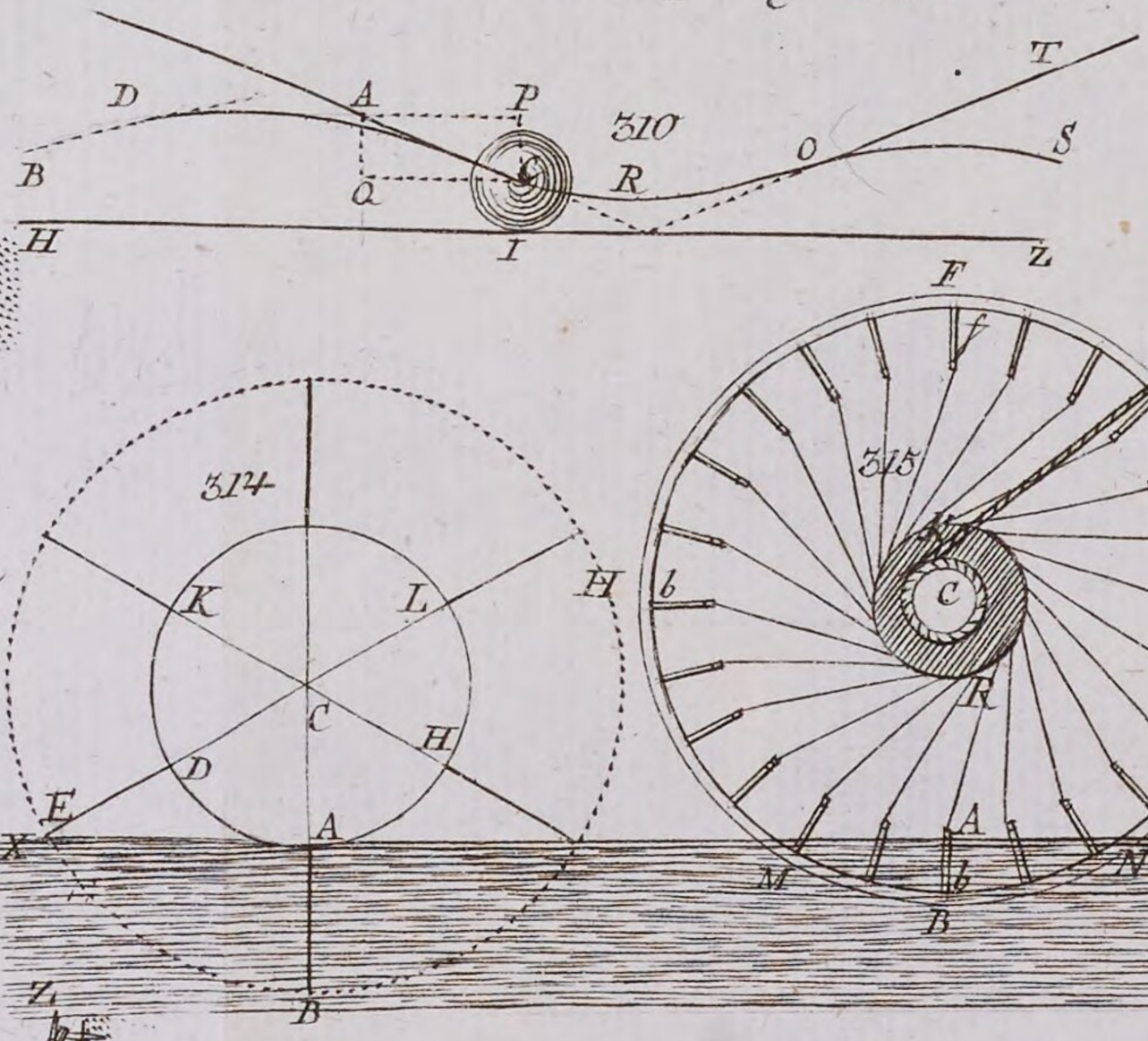

308




309



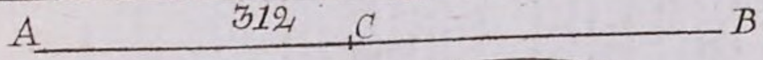

310



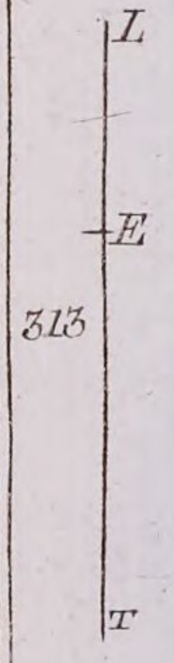

311



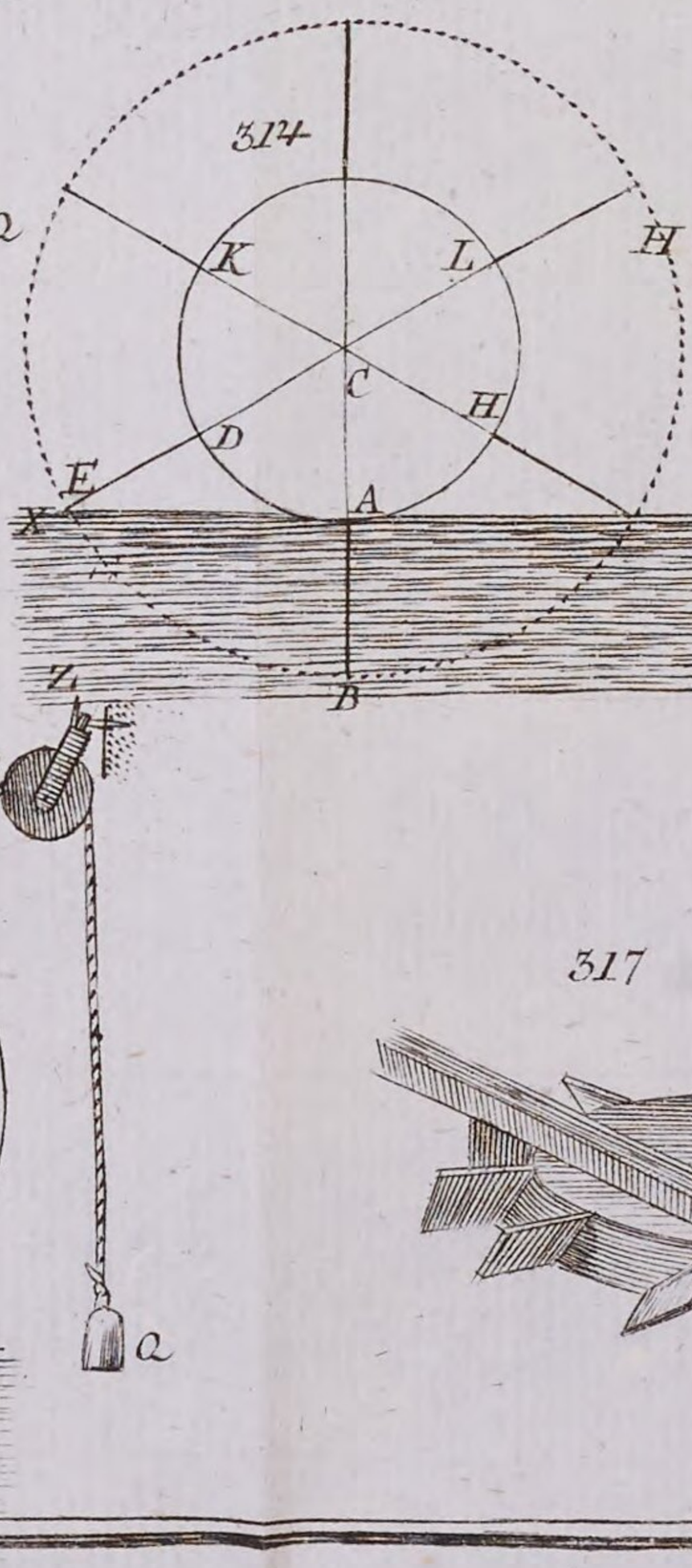

312



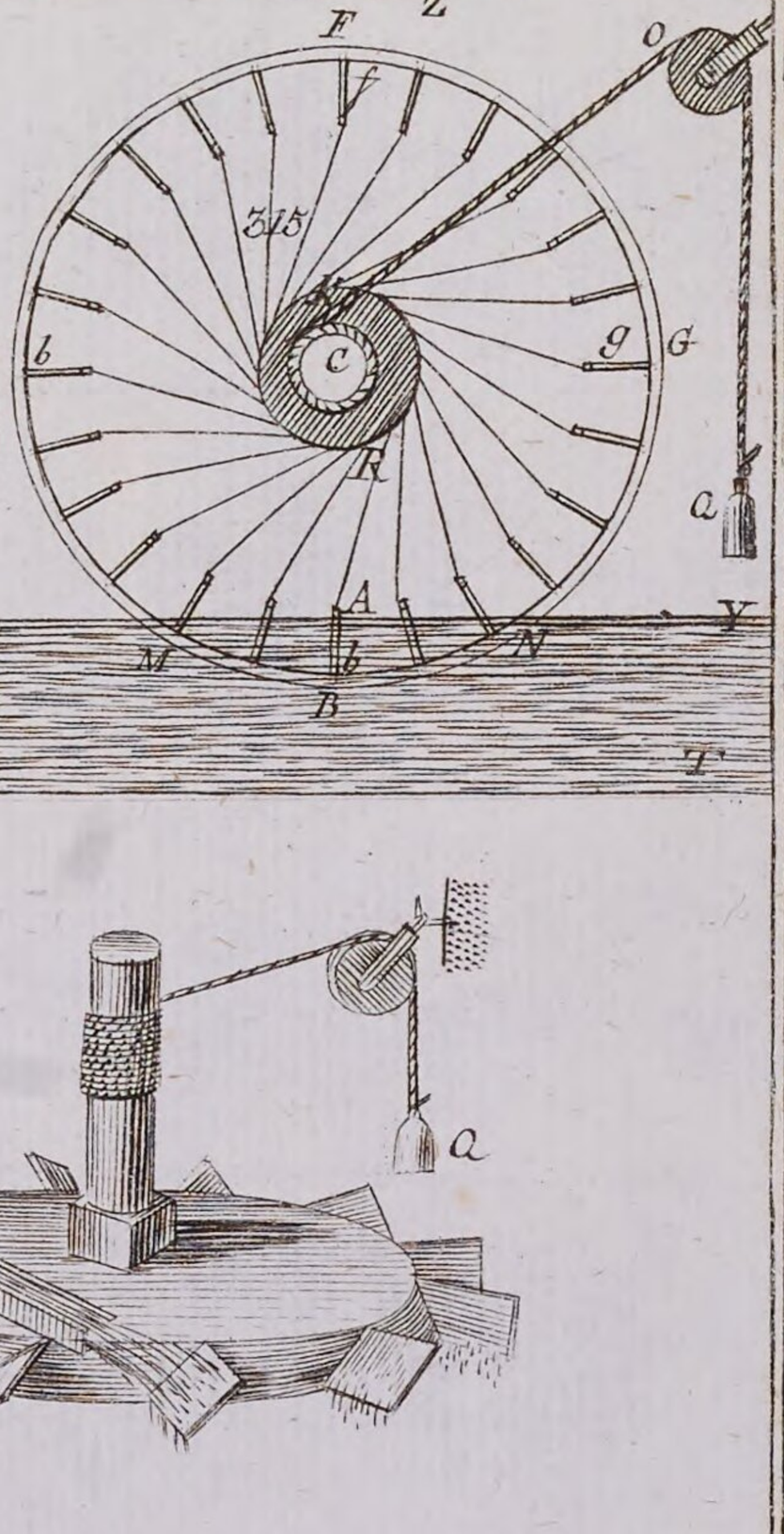

313



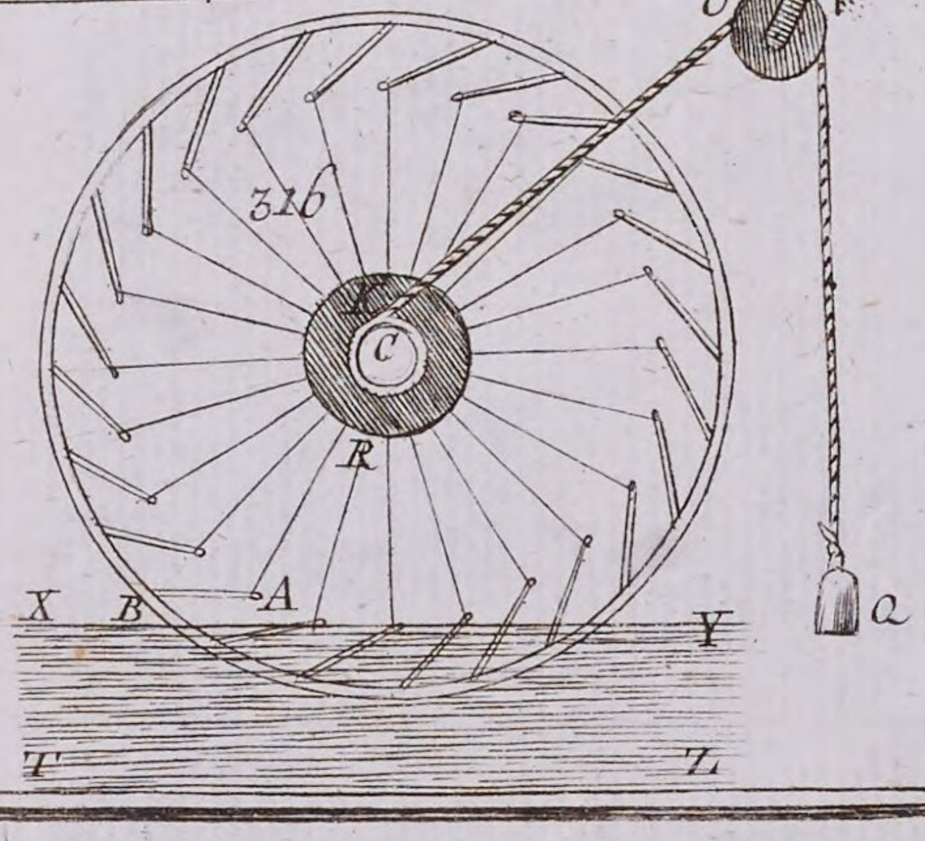

314



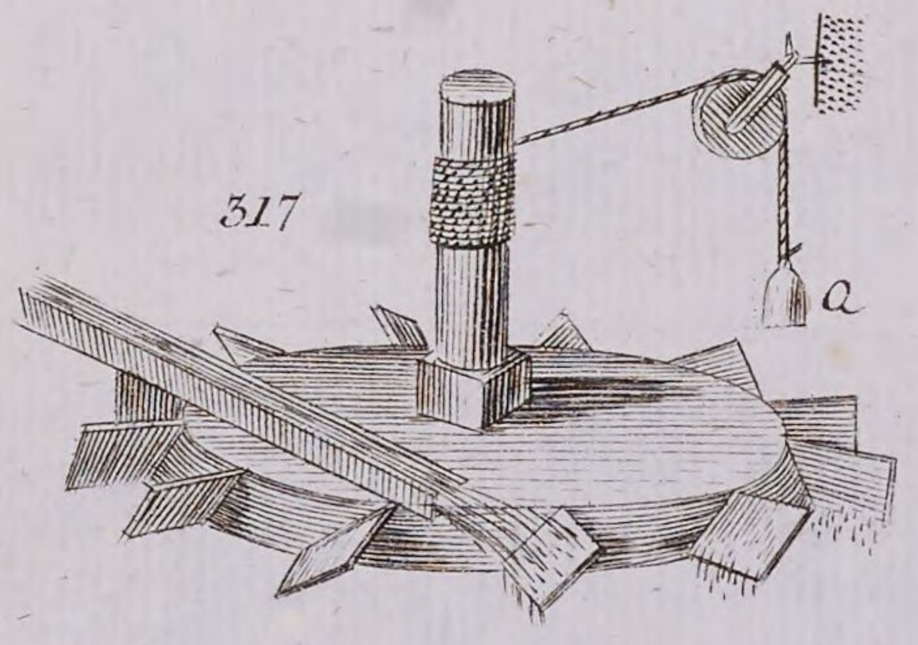

315



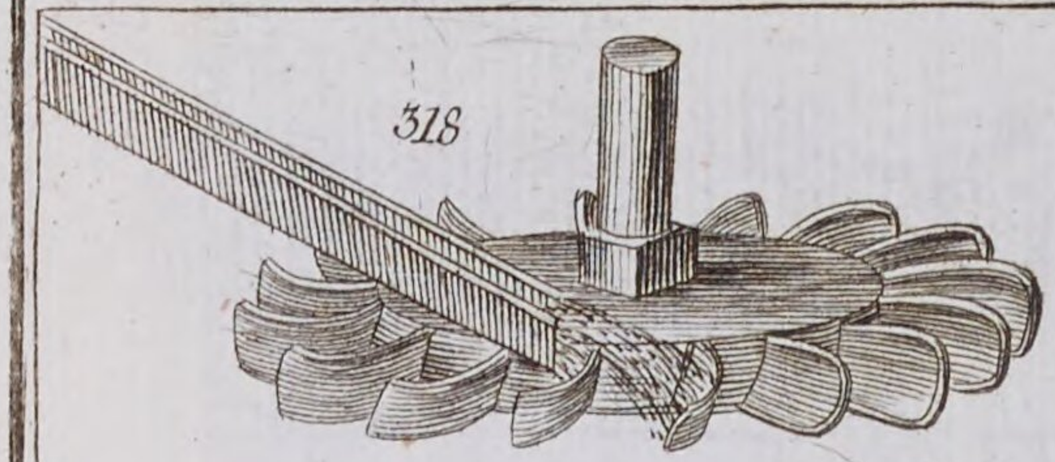

316



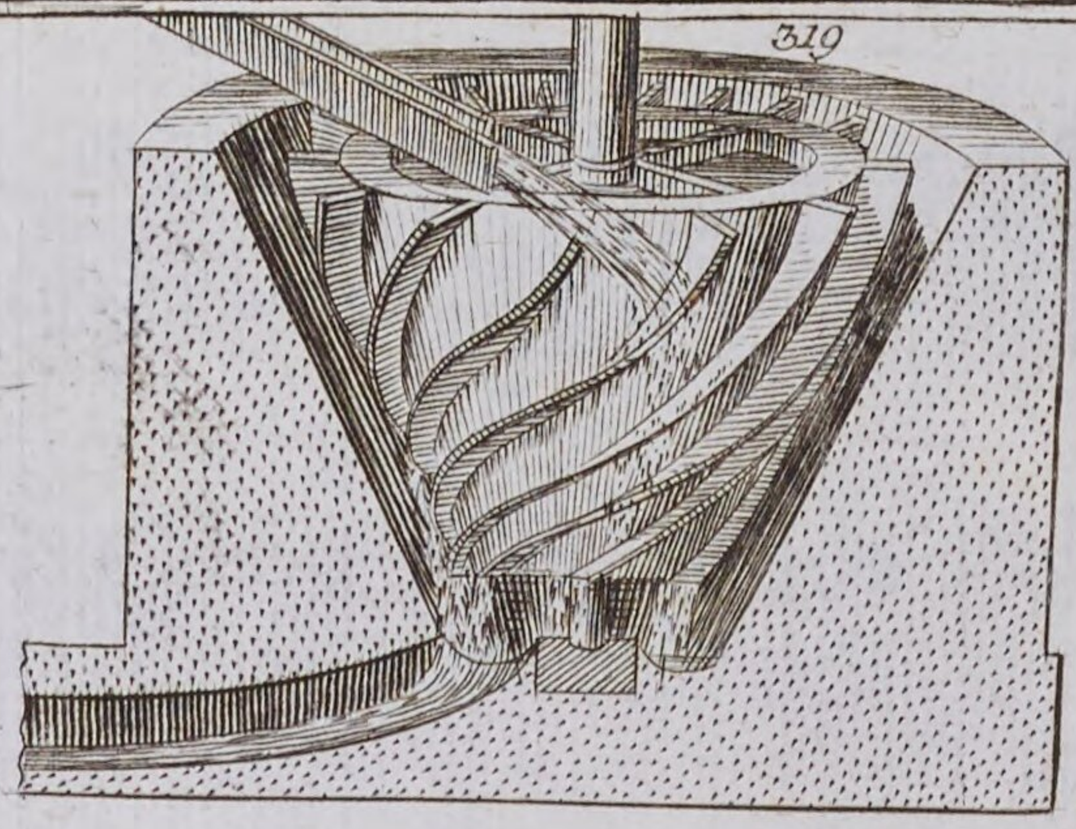

317

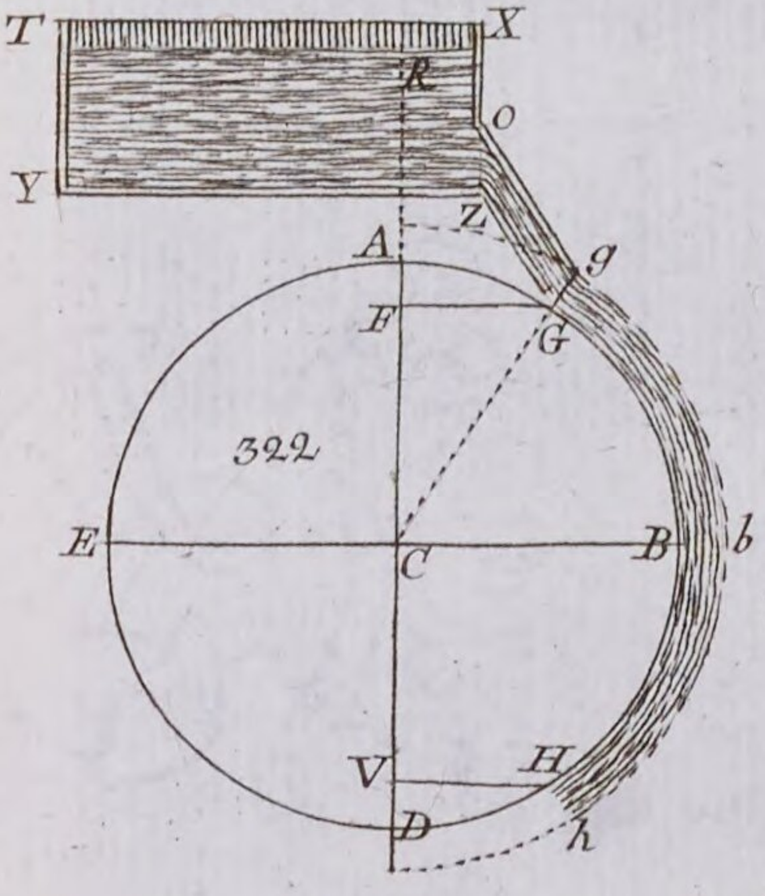


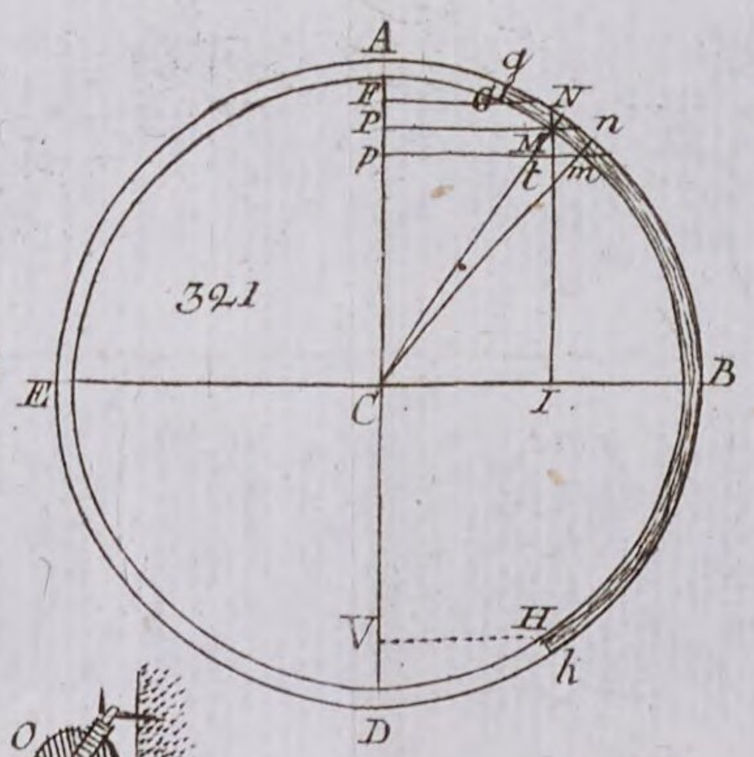
318

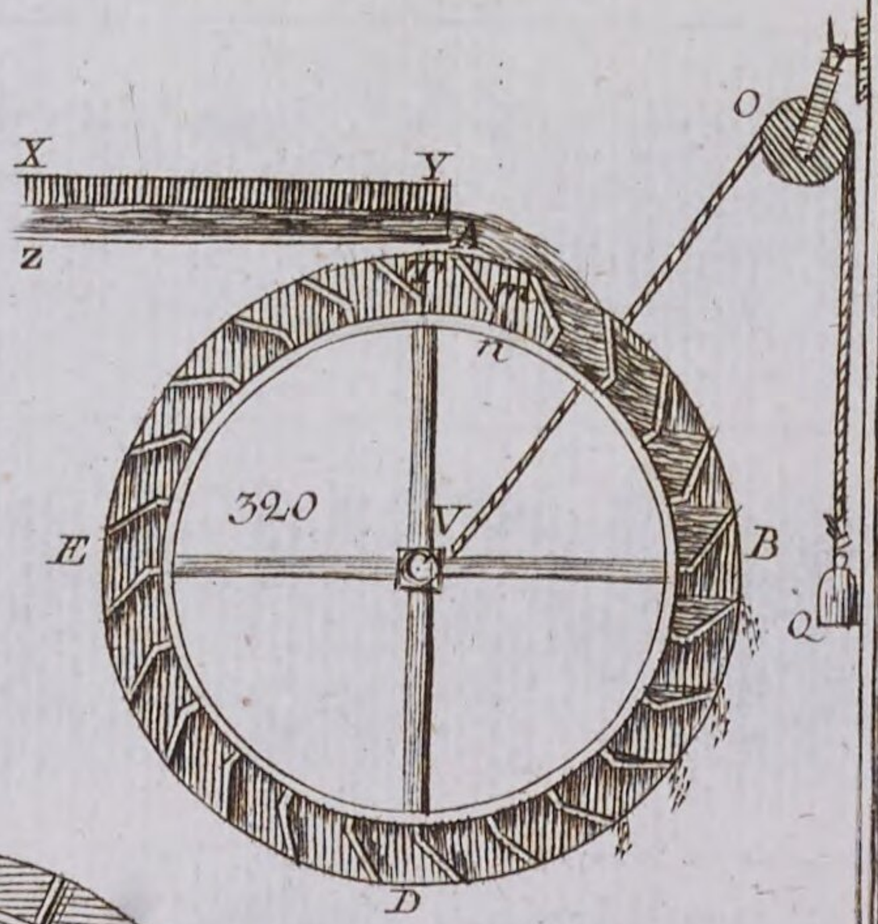


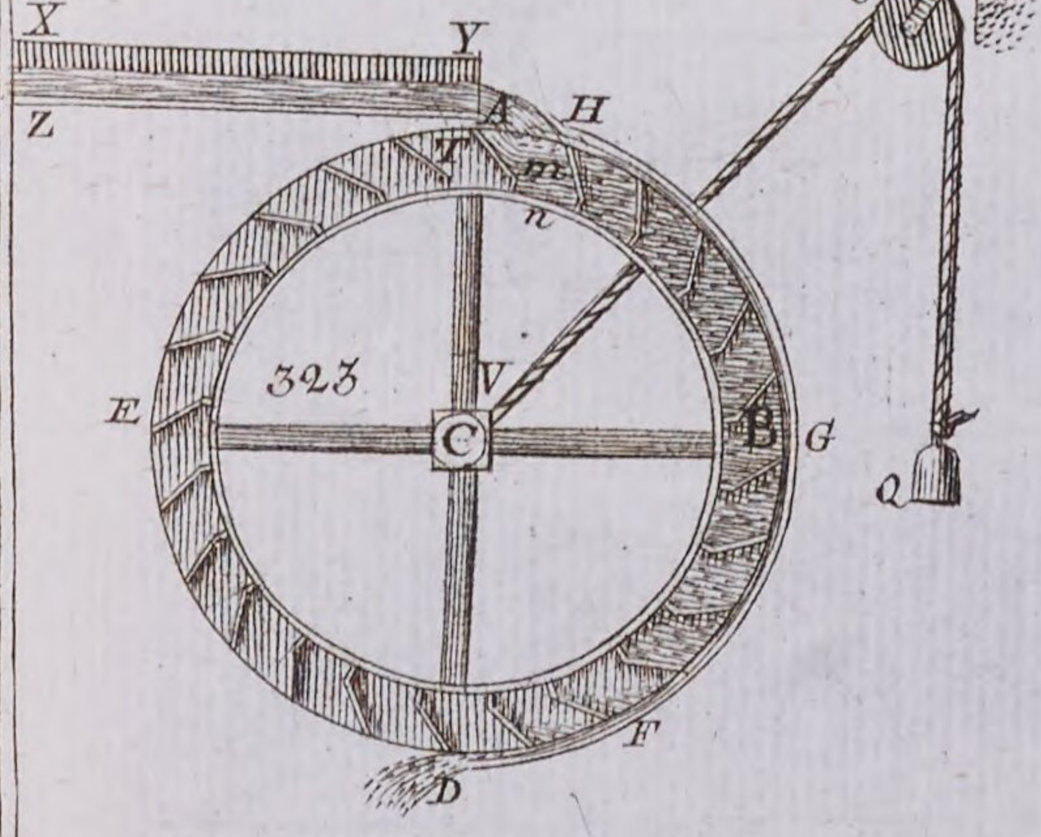
319

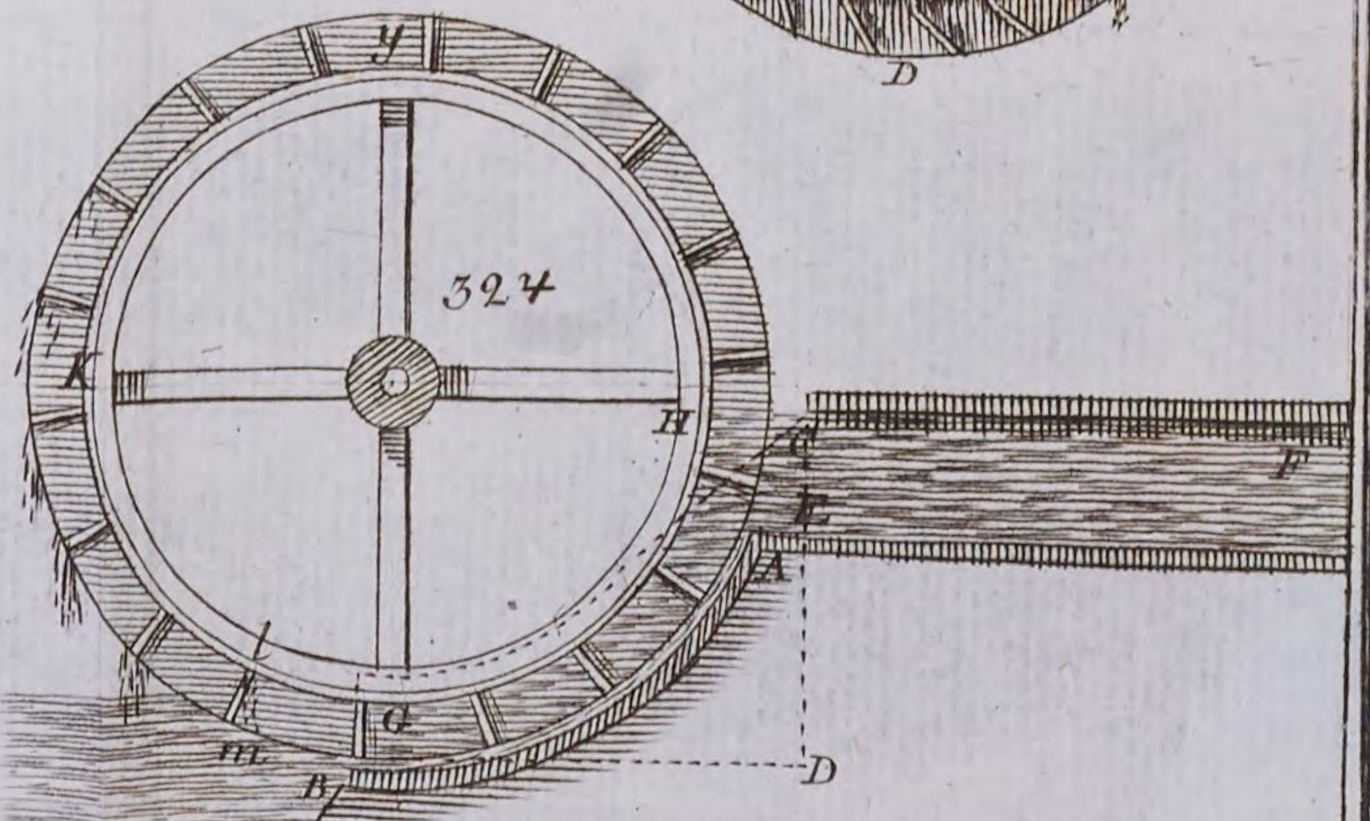



T
X
R
O
Y
Z
A
g
F
G
322
E
C
B
b
V
H
D
h

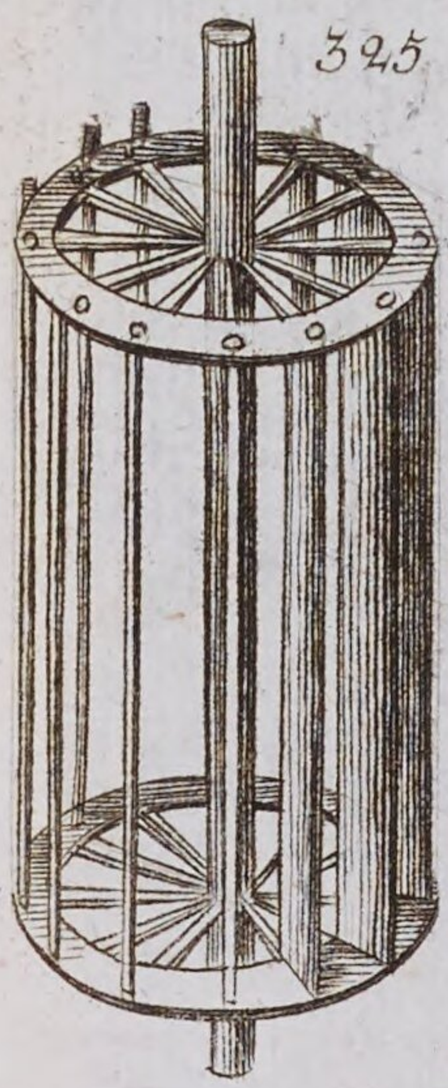

A
q
F
G
N
n
P
M
p
t
m
321
E
C
I
B
V
H
D
h


O
X
Y
Z
A
n
320
E
V
B
Q
D

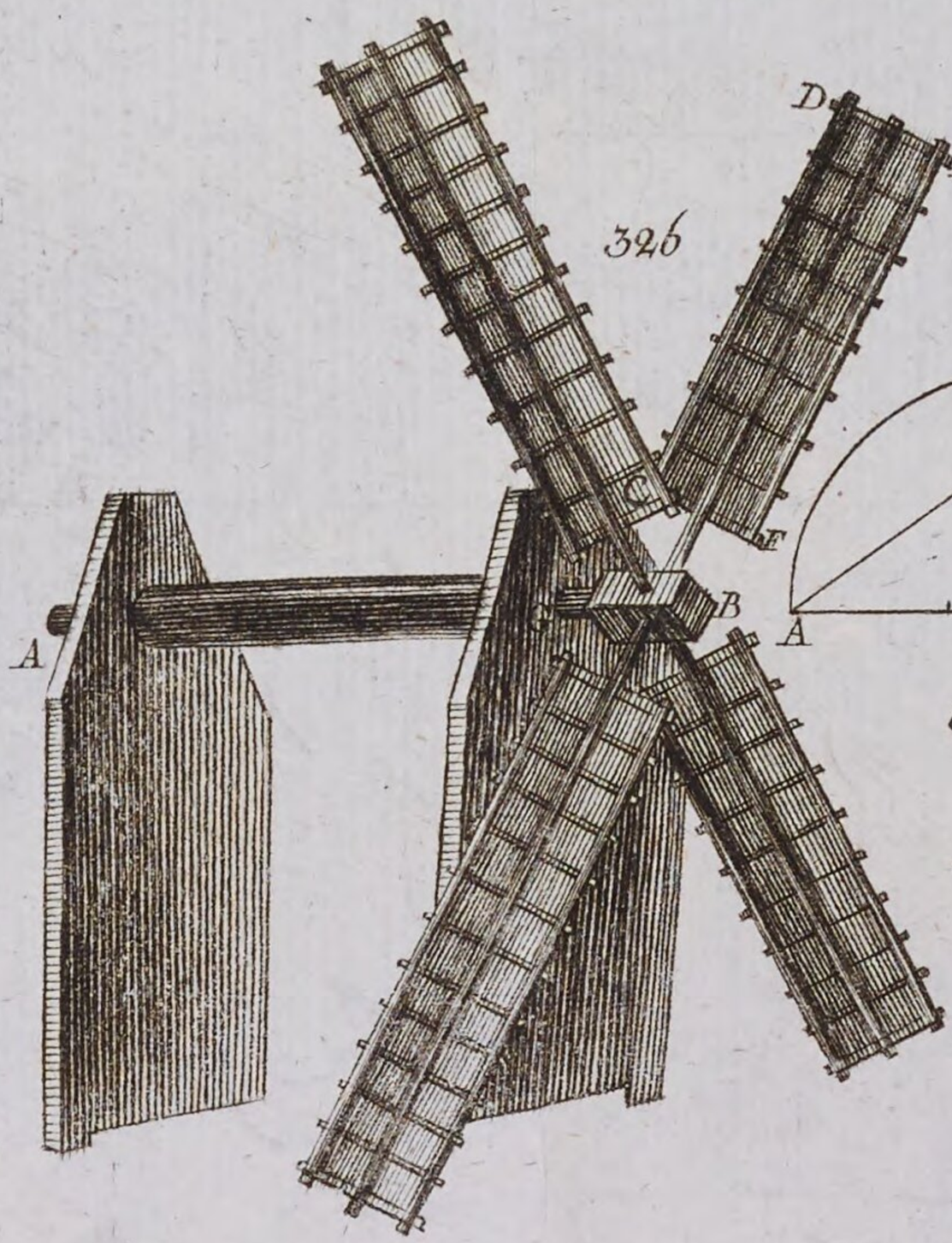

O
X
Y
Z
A
H
T
m
n
323
V
E
C
B
G
F
D
Q


y
324
K
H
G
F
E
A
P
l
m
B
D

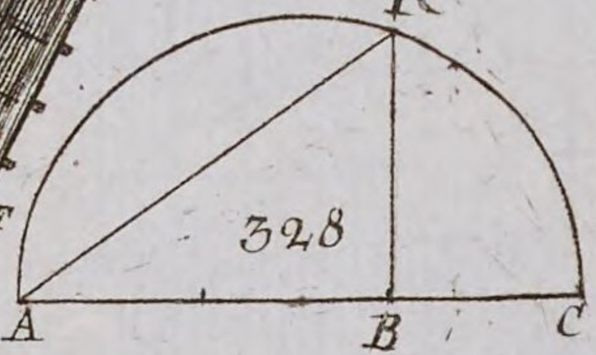
325



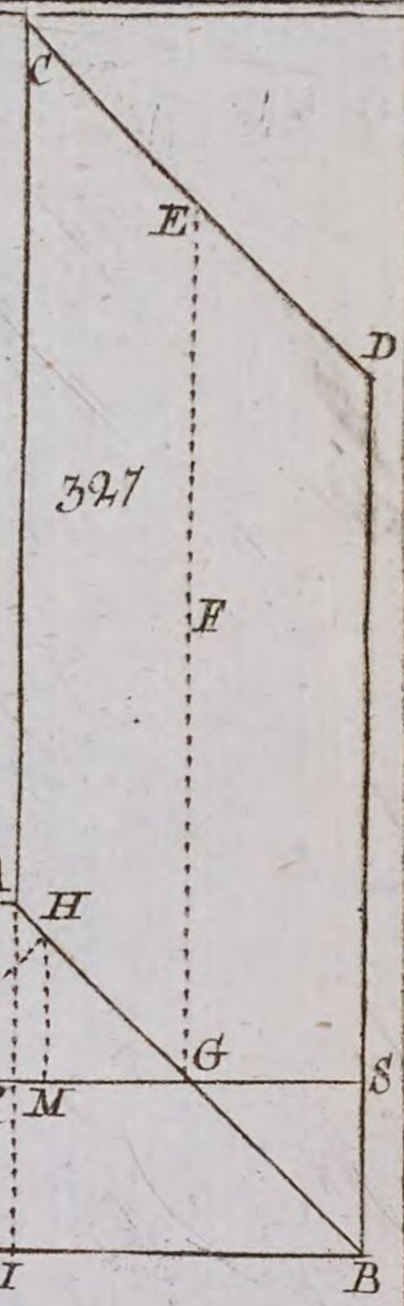
326



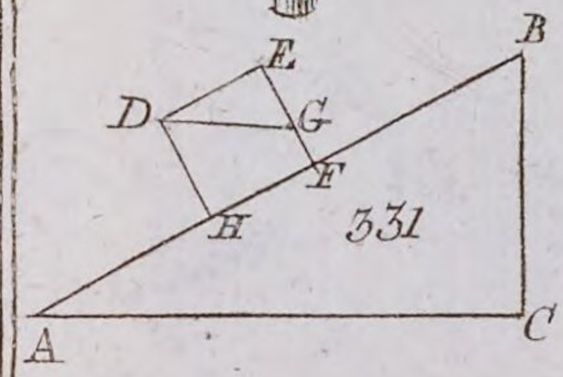

328



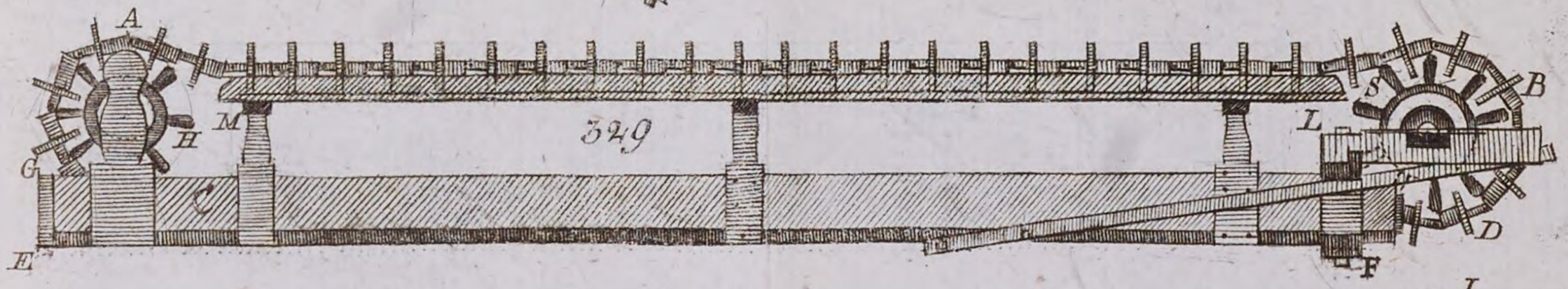

327



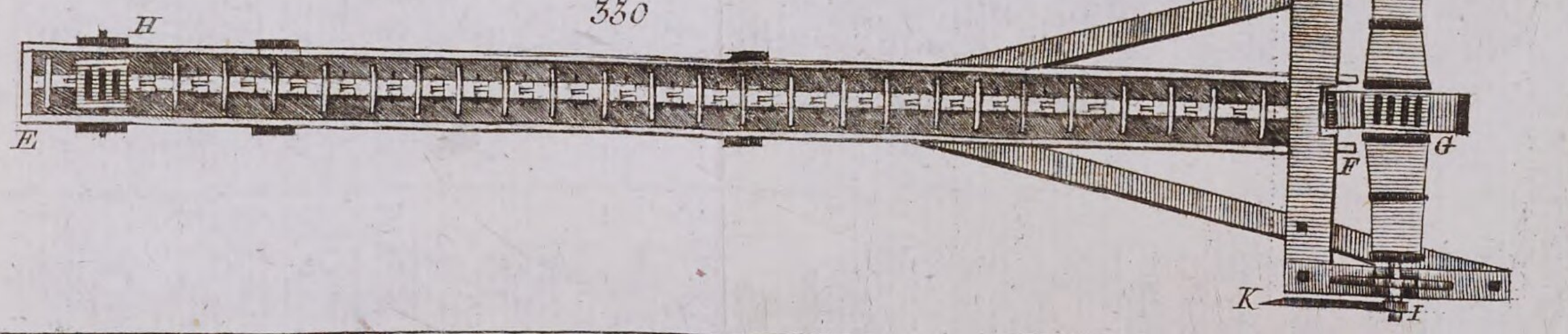

331



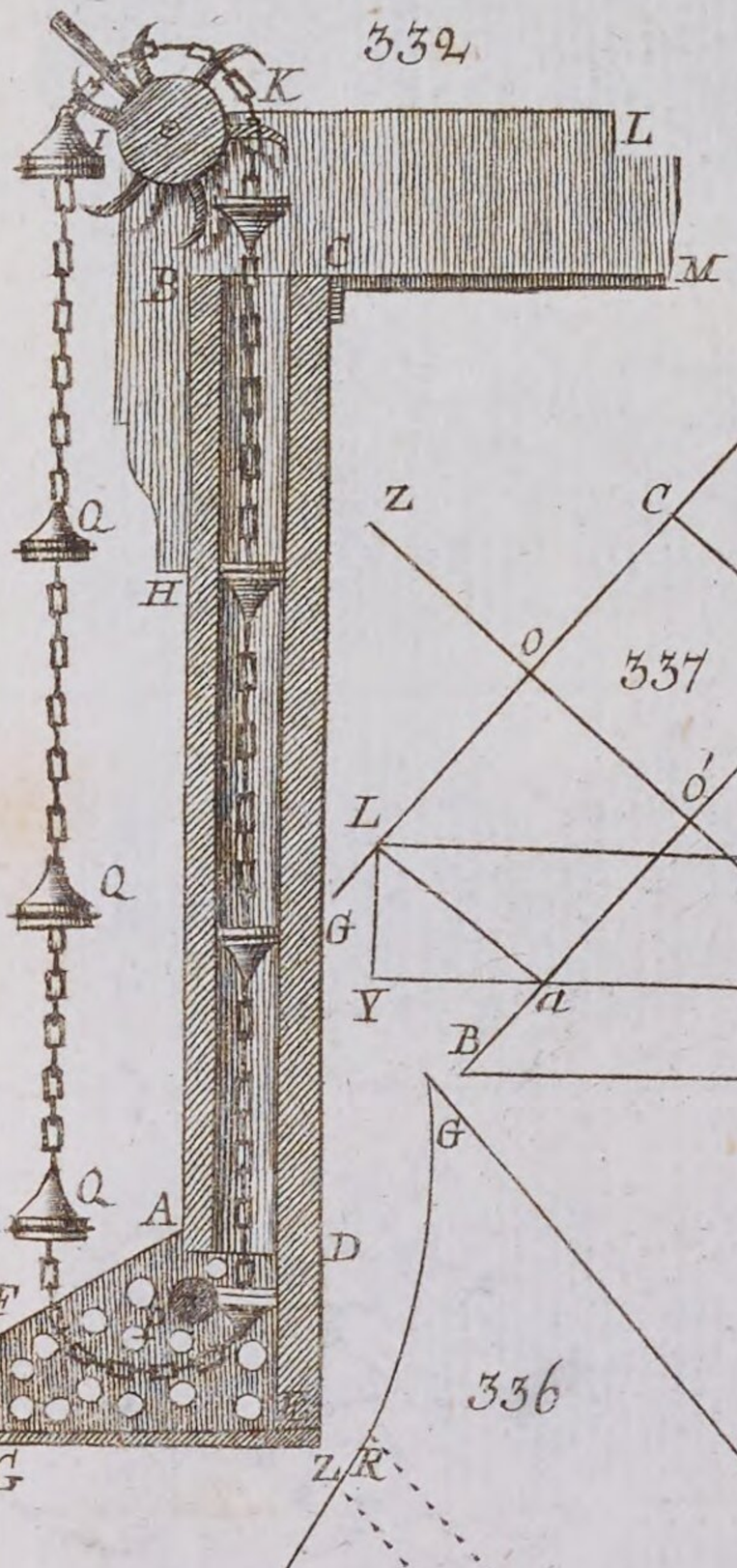

329



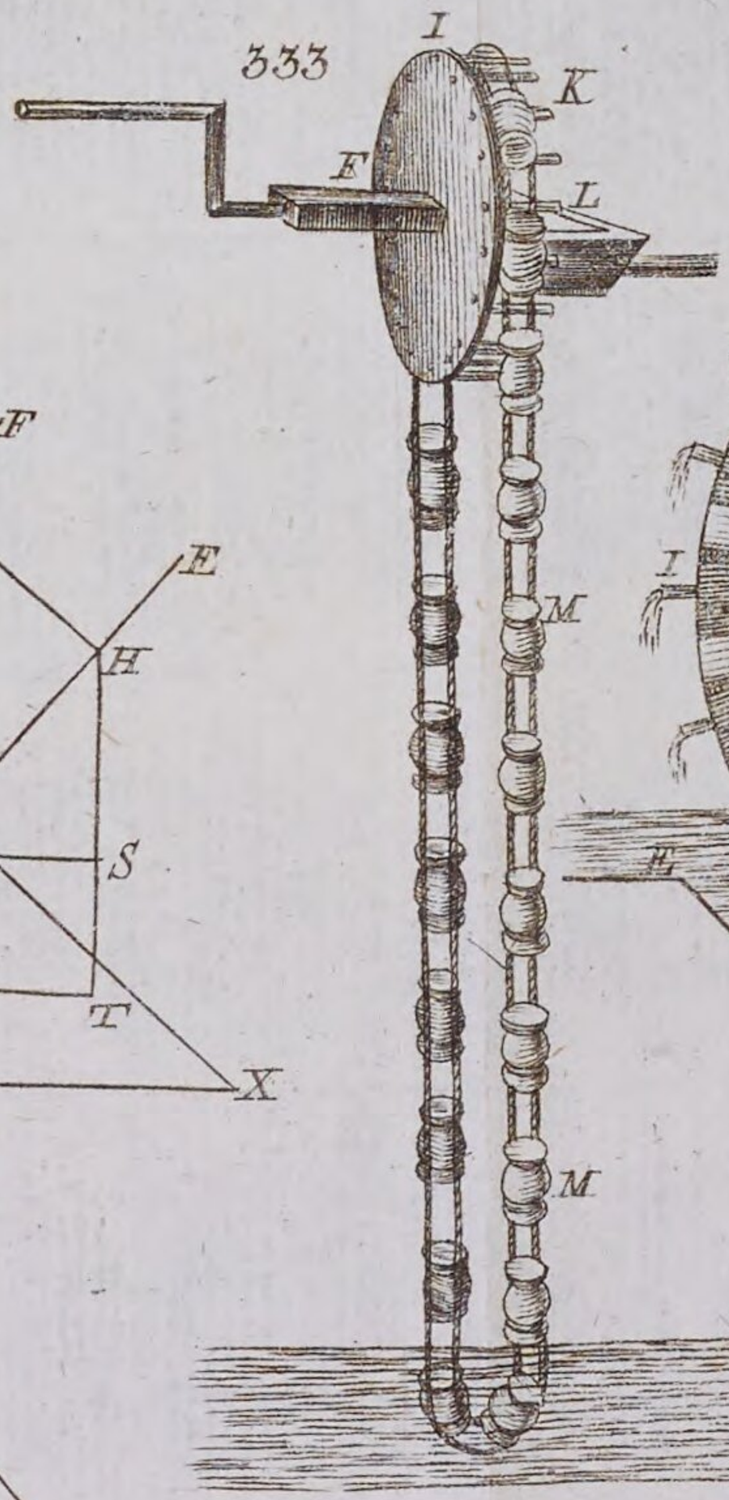

330



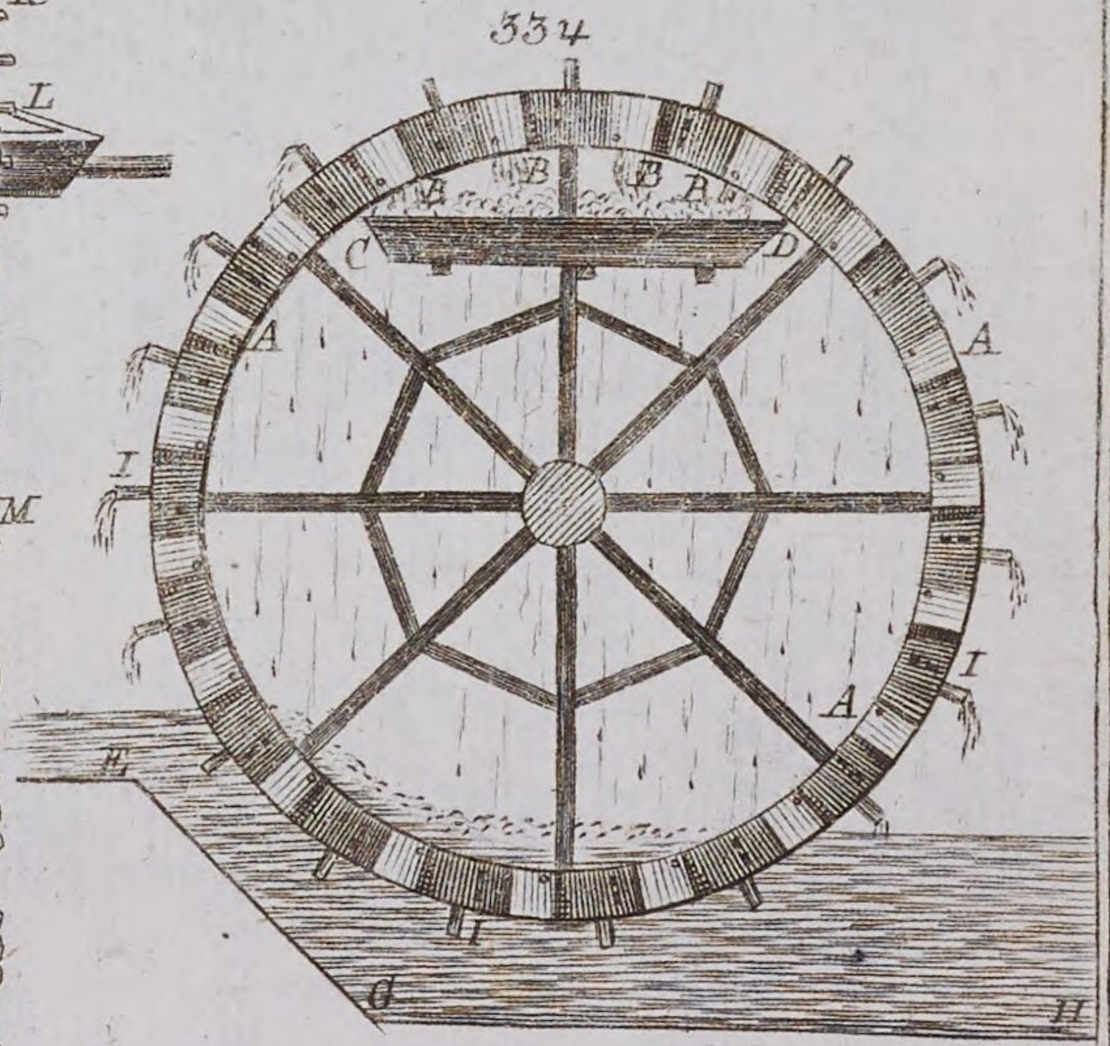
332



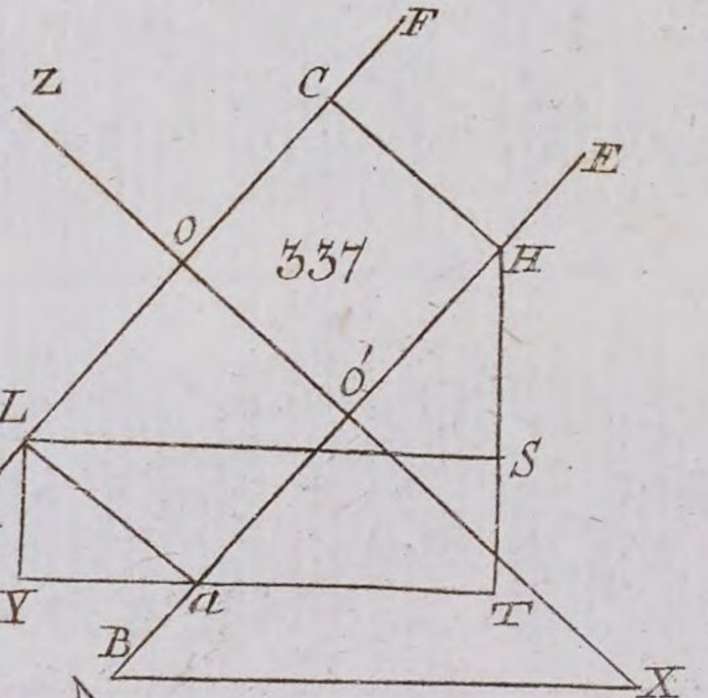

333



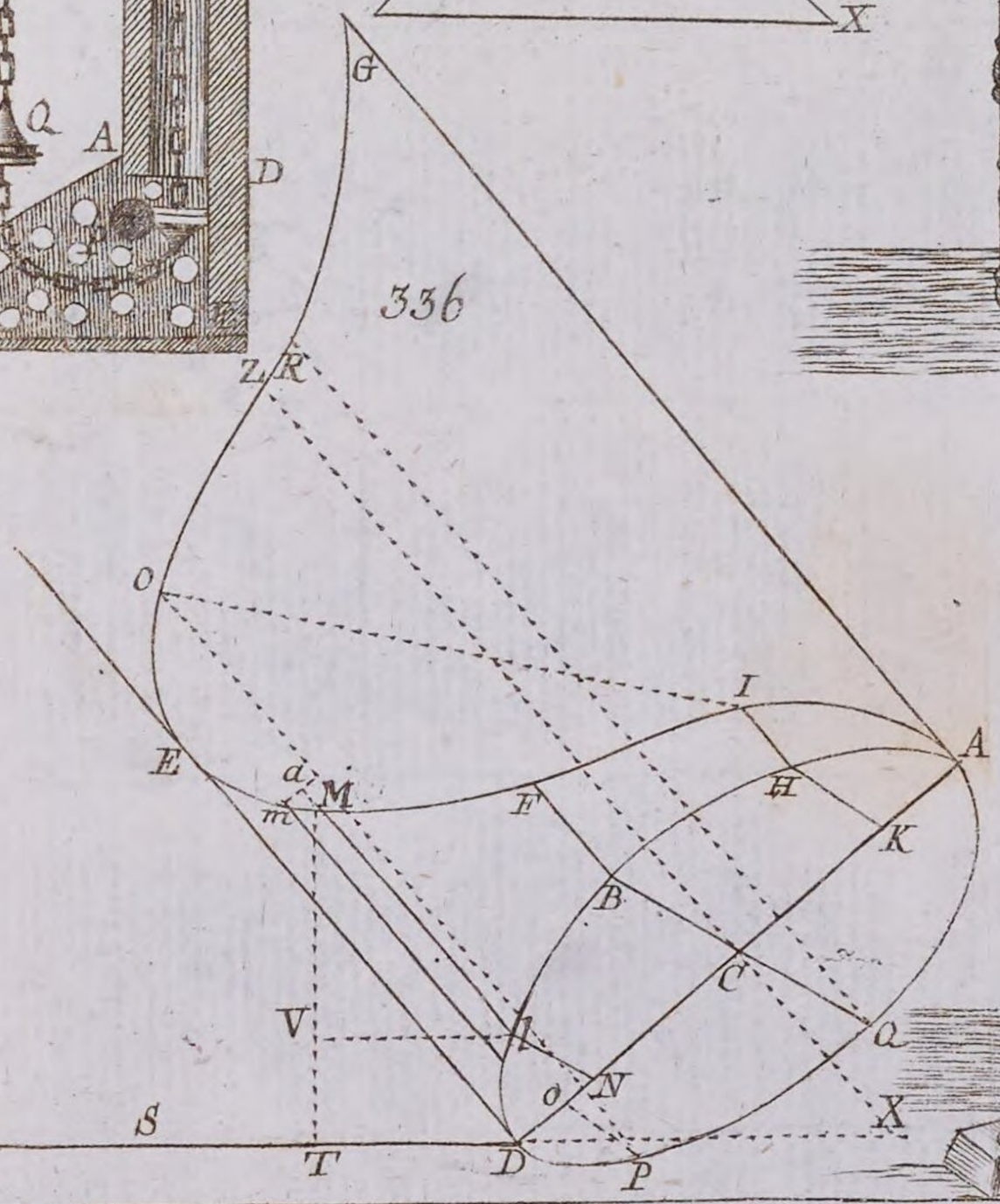

334



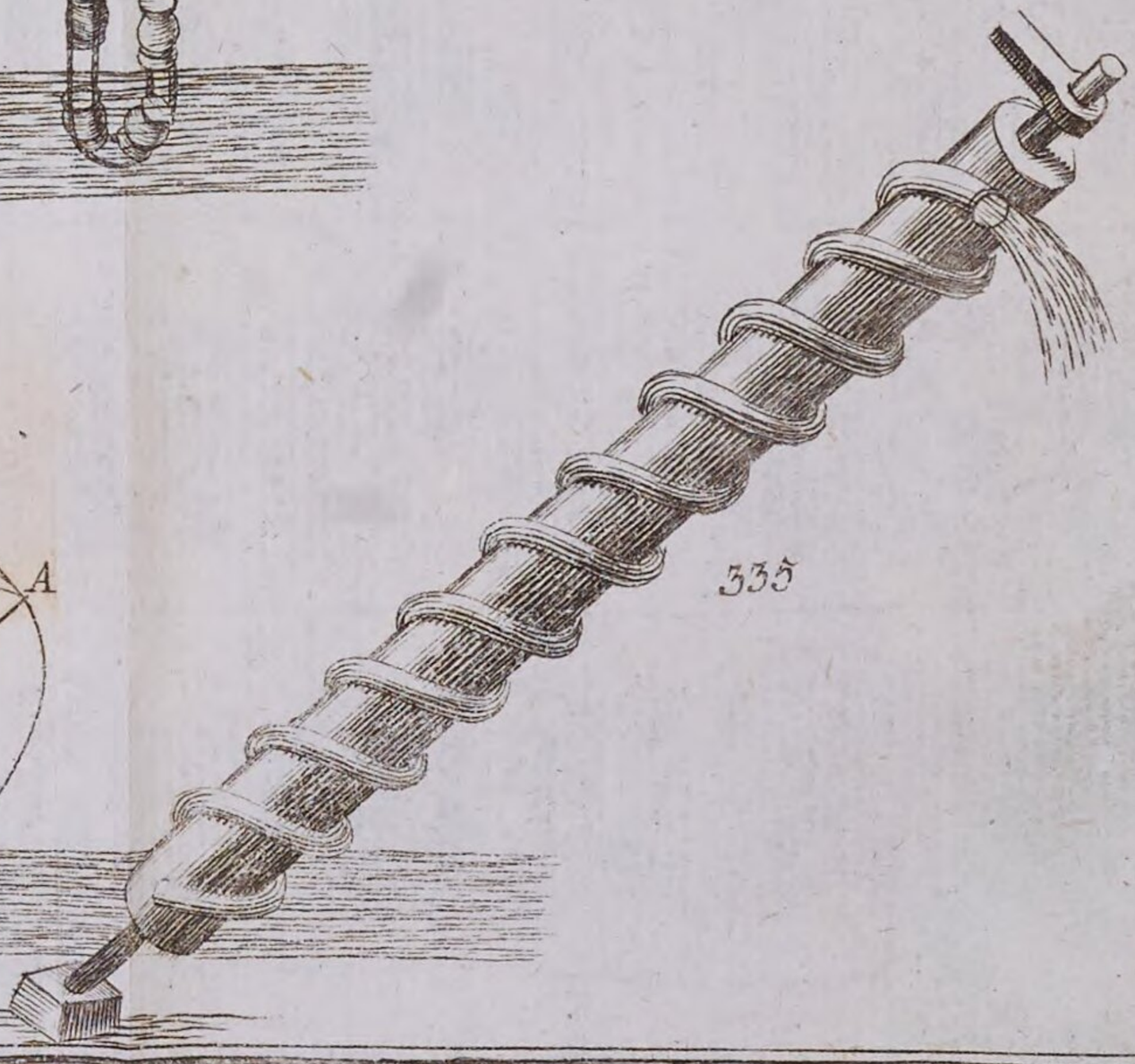

337




336




335



50 K K
Gerlach

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Gerlach, Friedrich Wilhelm,

Anfangsgründe der Mechanik zum Gebrauche der k. k. Ingenieursschule auf hohen Befehl aufgesetzt

Bd.: 2

Wien (1786)

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- K-K 182 -2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11254951-2
VD18 80266673-001